ISSN 2601-0305
ISSN-L 2601-0305

REVISTA DE MATEMATICĂ MARINESCU-GHEMECI OCTAVIAN

PUBLICAȚIE ANUALĂ PENTRU ELEVI ȘI PROFESORI

Liceul ,,Ștefan Diaconescu” Potcoava

Anul II, nr. 1/2018

Editura Hoffman

Redacţia: Liceul ,,Ștefan Diaconescu", Str. Principală, nr. 197, cod 237355, Potcoava, tel. 0742123058, e-mail: florin14mihai@yahoo.com

Revista este editată în colaborare cu Departamentul de Matematică-Informatică, Universitatea din Pitești.

Forma digitală a revistei poate fi accesată la adresa: http://rmgo.upit.ro

Publicată de: Editura Hoffman, www.EdituraHoffman.com, www.LibrariaHoffman.ro

Anul II, Nr. 1, 2018

Cuprins

COLȚIȘORUL CU AMINTIRI

Centenarul Marii Uniri

Filofteia MARINESCU[1]

În anul 2018, aniversăm 100 de ani de la evenimentul politic major al anului 1918: desăvârșirea statului național român, realizată prin unirea provinciilor românești cu România. La început a fost unirea Basarabiei cu România (27 martie 1918). Aceasta a survenit pe fondul dezmembrării Imperiului rus, odată cu proclamarea principiului autodeterminării. La 27 martie 1918 *Sfatul Țării* care cuprindea reprezentanți ai tuturor naționalităților - 138 deputați – a adoptat hotărârea Basarabiei de a se uni cu România.

Unirea Bucovinei cu România a avut loc la 28 noiembrie 1918 când *Congresul General al Bucovinei*, la propunerea lui Iancu Flondor, cel care a prezidat lucrările congresului, a votat cu o majoritate covârșitoare unirea Bucovinei cu Țara Mamă.

În final are loc unirea Transilvaniei, Banatului, Crișanei și Maramureșului cu România, la 1 decembrie 1918, când *Marea Adunare Națională* de la Alba Iulia, ce a reunit 1228 deputați aleși și peste 100.000 de oameni veniți din toate colțurile Transilvaniei, a consfințit unirea cu Patria Mamă.

Ce sărbătorim la Centenarul Marii Uniri?

Dacă ar fi să rezumăm în câteva idei, în 2018, la Centenarul Marii Uniri, toți cei care simt românește sărbătoresc:

Credința românilor care au făcut Unirea că toată suflarea românească trebuie să trăiască împreună, într-un singur stat, ROMÂNIA.

Efortul susținut al românilor, de-a lungul timpului, de a nu uita că sunt români.

Năzuința românilor de a înfăptui Marea Unire, avută de-a lungul secolelor, indiferent de vicisitudinile istoriei.

Tenacitatea liderilor și a elitelor românești, care au întreprins toate cele necesare ca Unirea să devină realitate.

[1]Profesor pensionar

Eroismul și jertfa celor fără de care visul românilor de veacuri, Marea Unire, nu ar fi fost posibil.

Nesupunerea românilor în fața imperiilor vremelnice care le-au afectat interesele și neacceptarea unei sorți potrivnice.

Ambiția românilor de a rămâne împreună după 100 de ani de la Marea Unire.

Rațiunea românilor de a căuta în permanență cele mai bune împrejurări pentru concretizarea aspirațiilor legitime și valorificarea acestor ocazii.

Ce umbrește Centenarul Marii Uniri?

O scurtă privire, aruncată asupra hărții României anului 2018 și a celei din 1918, ne arată că bucuria Centenarului Marii Uniri nu poate fi deplină. România nu mai arată ca acum 100 de ani, după Marea Unire. În 28 iunie 1940, în urma Pactului Ribbentrop-Molotov, România este sfâșiată, din nou, și pierde Basarabia, nordul Bucovinei și Ținutul Herței. Umbra acelei zile, tragice pentru România, este încă resimțită de întreaga suflare românească. Serbarea Centenarului României trebuie să fie și un motiv de reflecție, dar mai ales de conștientizare că este de datoria noastră să refacem ceea ce au pus în operă românii în ziua de grație 1 Decembrie a anului 1918. Deci, la 100 de ani de la Marea Unire, trebuie să știm că România nu este întreagă fără Basarabia și fără nordul Bucovinei!

În acest an unic pentru România, îi omagiem pe cei care, acum 100 ani, au reușit să realizeze un vis aparent imposibil: unirea tuturor românilor. Este un motiv de sărbătoare, dar este și un prilej de gândire pentru fiecare român de azi.

Miracolul Marii Uniri nu s-a făcut în condiții ușoare. La 1918, România era vlăguită de război și epidemie, parțial ocupată de armate străine și departe de aliații săi. Toate nemulțumirile și dezbinările noastre de astăzi par neînsemnate față de ceea ce au avut de înfruntat înaintașii noștri. Totuși, ei au reușit acolo unde toți cei dinaintea lor dăduseră greș de nenumărate ori. Au reușit pentru că au acționat împreună.

Vom omagia anul acesta mari figuri naționale: gânditori, oameni politici, militari sau simpli cetățeni. La vremea lor, nu erau mari eroi, ci doar oameni ca noi, cu defecte și calități. Unii ambițioși sau nerăbdători, alții pesimiști sau descurajați. La momentul 1918, fiecare însă a reușit să pună totul deoparte – să se pună pe sine deoparte! – în slujba unui țel mai presus de ei: un stat unitar, democratic și o casă mare pentru o mare familie. România Mare urma să devină statul tuturor fiilor săi, indiferent de etnie, religie sau opțiuni ideologice. O unitate în diversitate.

A omagia realizările înaintașilor este frumos, însă nu suficient, pentru că moștenirea pe care ne-au lăsat-o nu este doar un cadou, ci și o datorie. Aceea de a hrăni și crește, zi de zi, prin faptele modeste ale fiecăruia, avuția comună. A omagia cum se cuvine înaintașii înseamnă înainte de orice a omagia spiritul lor.

La 1918, oamenii politici cei mai diferiți - adversari înverșunați pe viață - au știut să-și dea mâna și să lucreze împreună. Îi separau educația, caracterul și ideologiile, dar aveau în comun un lucru: toți doreau o Românie unită și democratică, un acasă în care fiecare să se poată dezvolta liber.

A fi uniți nu înseamnă a fi toți la fel, ci a defini și păstra un sanctuar sufletesc comun, o zonă care nu suferă negociere sau conflict: România. Asemenea unui arbore, fiecare ramură crește altfel, dar fiecare contribuie la soliditatea trunchiului comun. Indiferent de tot ce ne desparte, suntem români. Români în primul rând, nu doar în ultimă instanță.

România Mare a cuprins între hotarele sale multe minorități naționale sau religioase. De la bun început, toți trebuiau să se poată dezvolta în siguranță și egalitate, sub un singur steag. Diferențele acestea nu sunt o sursă de vulnerabilitate, ci sunt ceea ce ne unește.

Așadar, trebuie să învățăm din exemplul marilor înaintași de la 1918 și să nu lăsăm ca tot ceea ce ne desparte să ne dezbine. Dacă reușim să ne privim față în față și să găsim, dincolo de opțiunile fiecăruia, cele câteva lucruri sacre care cad în custodia noastră comună, atunci vom putea să ne privim în ochi atât bunicii pe care-i omagiem, cât și nepoții care așteaptă de la noi o Românie eternă și demnă.

Vom avea de sărbătorit în acest an câteva date de aur. În sunetul festivităților, cel mai semnificativ semnal sonor pe care îl putem da ar fi un minut de tăcere, nu doar ca să ne reculegem pentru sacrificiul total al românilor de acum 100 de ani, ci și un moment de reflecție, în care fiecare să ne întrebăm cu ce putem contribui nu cu vorbe mari, ci cu fapte modeste, în fiecare zi, pentru ca România mea să devină România noastră.

Suntem niște oameni norocoși că ne-a fost dat să trăim acest popas istoric, 100 de ani de la Marea Unire. Toate evenimentele consemnate în istoria țării noastre s-au regăsit și în istoria acestor meleaguri ale Oltului. Peste tot, oamenii de azi se implică în a cinsti marea sărbatoare prin acțiuni frumoase, fie cu caracter științific, fie artistic. Un grup de foști elevi ai liceului ,,Ștefan Diaconescu" Potcoava, împreună cu profesorul de matematică al liceului au inițiat un Concurs Interjudetean de Matematică în cinstea profesorului Marinescu Ghemeci-Octavian, un profesor remarcabil, care din păcate nu mai este printre noi. Concursul este încununat de o revistă. Acțiunile desfășurate în acest an au fost dedicate centenarului unirii. Tot în cinstea centenarului, profesorii și elevii liceului au prezentat o serie de activități artistice, culturale, literare.

1 Decembrie 1918 rămâne inscrisă în memoria românilor ca Ziua Marii Uniri. ,,Pe-al nostru steag e scris unire" răsuna acum un secol ca fiind idealul românilor, prin unirea care avea să ajute la crearea unei identități comune.

Prin participarea la războiul de întregire națională, prin sacrificiile de vieți omenești, potcovenii s-au integrat eforturilor colective ale întregului popor.

Învățătorii Manole Rădulescu, Ștefan Cârjan, Dumitru Geeorgescu, Dumitru Dumitrescu, Constantin Ștefănescu și Mihai Dumitrescu au luptat cu arma în mână pentru cauza sfântă a neamului.

Sub crucile aliniate ostășește în vreun cimitir militar, ori presărați pe tot întinsul patriei își dorm odihna de veci și eroii din localitatea noastră, purtând și acum grija celor lăsați acasă fără sprijinul lor.

Țara și-a întregit hotarele!

Să nu-i uităm!

Cel puțin de două ori pe an să ne gândim la ei, la jertfa lor, în ziua de Înălțare și la 1 Decembrie. Cu sânge cald și lacrimi sărate, țara le-a scris numele pe cruci și pe monumente, pentru aducere aminte și veșnică recunoștință.

Mărturie a acestei recunoștințe stau cele două monumente din localitate ridicate în cinstea eroilor căzuți în războaiele din anii 1913 și 1916-1918:

Monumentul Eroilor de la Școala Primară din satul Mijlocu-Potcoava:

1. Învățător Dumitru Geeorgescu, Locotenent
2. Ion Badea
3. Ion Pârvu
4. Ion Zamfir
5. Tudor Dumitru
6. Dumitru Tudor
7. Dumitru Drejoi
8. Iancu Goală
9. State Peica
10. Ion Cârpici
11. Pavel Apostol
12. Constantin Pătrașcu
13. Ion Pestrițu
14. Ban Haralambie
15. Marin Stănculescu
16. Niculae Guianu
17. Niculae Vladu
18. Alexandru Giogârdac
19. Constantin Dumitrescu
20. Florea Baniță
21. Coman Neacșa
22. Dumitru Tănăsoiu
23. Constatin Matei
24. Constantin Cazangiu
25. Dumitru Laudă
26. Ion Popescu
27. Ilie Voicu
28. Marin Badea
29. Radu Milea
30. Ion Ioniță
31. Marin Popa
32. Marin Marica
33. Petre Bălan
34. Alexandru Popa
35. Alexandru Dogaru
36. Nicolae Nicolae
37. Ilie Giogârdac
38. Licsandru Pârvu

39. Mihai Licsandru
40. Ciurea Drejoi
41. Stan Laudă
42. Radu Stan
43. Radu Marin
44. Marin Voicu
45. Marin Drejoi
46. Matache Marin
47. Ion Arapu
48. Stancu Mierloiu
49. Marin Dumitru
50. Dumitru Milea
51. Ion Rădulescu
52. Radu Răduneață
53. Constantin Cercelaru
54. Marin Livezeanu
55. Tudor Dorobanțu
56. Marin Iancu
57. Ion D. Apostescu
58. Badea Pestrițu
59. Neacșu Pârvu
60. Marin Badea
61. Marin Gheorghe
62. Mihai Milea
63. Stancu R. Vișan
64. Iancu Florea
65. Petre Iancu
66. Badea Fudulu
67. Apostol Iordache
68. Ilie Diaconu
69. Florea Cojocaru
70. Călin Cojocaru
71. Tudor Popescu
72. Tudor Dincă
73. Călin Ioniță
74. Mihai Stănculeț
75. Dumitru Drăghici
76. Dumitru Popescu
77. Gheorghe Popescu
78. Zamfir Popescu
79. Marin R. Oprea
80. Voicu Marin
81. Ilie Burcea
82. Nicolae V. Ene
83. Stancu O. Roșu
84. Vladu S. Savu
85. Stancu G. Toader
86. Constantin Angelescu
87. Mihai R. Drăgan
88. Ion R. Pârvulescu
89. Ion G. Florescu
90. Nicolae Neacșu
91. Gheoghe Ciută
92. Ion Știoi
93. Dumitru Voicu
94. Voicu Ilie
95. Nicolae Stoica
96. Călin Rotaru
97. Ion M. Roșu
98. Năstase Ghioc
99. Marin Radu
100. Emil G. Marinescu
101. Gheorghe Ionescu
102. Gheorghe Popescu
103. Niță Bălășoiu
104. Voicu N. Bălășoiu
105. Gheorghe Zamfirescu
106. Marin Popescu
107. Ion Florescu

108. Marin Vișan
109. Stan C. Neacșu
110. Ion Sârbu
111. Ion Anghel
112. Ilie Milcu
113. Pârvu Dumitru
114. Vișan Vână
115. Ion Ganea
116. Ion Bâia
117. Mihai Mazilu
118. Stancu Dobre
119. Dumitru Taifas
120. Dumitru Georgescu
121. Constantin Florescu
122. Marin Cercelaru
123. Ilie Stănculescu
124. Marin Pârvulescu
125. Gheorghe Costea
126. Năstase G. Manole
127. Dumitru Stoica
128. Niculae Oiuță
129. Constantin Livezeanu
130. Nicola C. Marinescu
131. Florea Stănculescu
132. Constantin Enăchioaia
133. Marin Fluture
134. Dumitru Tănăsoiu
135. Radu Pașala
136. Ion Optășanu
137. Constantin Cârpici
138. Nicolae Vâlcea
139. Baicu Moșteanu
140. Dumitru Guianu
141. Mihai Popa
142. Dumitru Pașala
143. Mihai Săraru
144. Marin Bădica
145. Ion Dulfeanu
146. Ilie Stanca
147. Ion Miu
148. Mihai Bădica
149. Năstase Rusu
150. Stan Optășanu
151. Alexandru Câtu
152. Matei Cârpici
153. Ion Drejoi
154. Gheorghe Constatin
155. Nicolae Bălan
156. Radu Baniță
157. Ilie Stancu
158. Ion Bucinică
159. Stancu Drejoi
160. Constantin Răducanu
161. Florea Neacșu
162. Ion Stoica
163. Nicolae Leznescu
164. Constantin Stănculescu
165. Ion N. Badea
166. Marin N. Popescu
167. Anghel I. Ciobanu
168. Petre Grigorescu
169. Marin D. Mihai
170. Nicolae Trocmaer
171. Ion Nuță
172. Tudor I. Cârjan

Monumentul Eroilor de la Școala de 8 ani Sinești-Potcoava:

1. Dumitru Năstase, Sergent
2. Buiculescu Stan, Sergent
3. Ciuciu Alexandru, Caporal
4. Bălcău Nicolae
5. Nicolescu Constatin
6. Baboi Ilie
7. Proscan Tudor
8. Stan Marin
9. Sandu Stoica
10. Sandu Coman
11. Cojocaru Stancu
12. Rotaru Călin
13. Pahonțu Călin
14. Predica Stancu
15. Lupescu Nicolae
16. Teodorescu Gheorghe
17. Gheorghe Radu
18. Buiculescu Mihai
19. Sandu Dumitru
20. Ion Sandu
21. Dragomir Gheorghe
22. Stancu Stoica
23. Avram Pană
24. Stancu Ion
25. Doinea Gheorghe
26. Radu Badea
27. Văleanu Marin
28. Dobre Radu
29. Cochinescu Dumitru
30. Pandelică Alexandru
31. Rădoi Badea
32. Baboi Marin
33. Baboi Dumitru
34. Burcea Ilie
35. Sandu Radu
36. Rotaru Ivan
37. Dobrin Dumitru
38. Dinu Nedelea
39. Baboi Ilie
40. Lupescu Dumitru
41. Ionică Florea
42. Mihai Gheorghe
43. Staicu Ilie
44. Crăcea Florea
45. Drăgușin Gheorghe
46. Gheorghe Florea
47. Sima Nicolae
48. Dragomir Ion
49. Bălăuroiu Badea
50. Voicu Gheorghe
51. Văleanu Iancu
52. Poșircă Ion
53. Dumitrescu Ilie
54. Perețeanu Ion
55. Costache Dumitru
56. Radu Badea
57. Geican Alexandru
58. Bănică Ilie
59. Bădicu Ion
60. Toma Constantin-Ion
61. Dumitrache Voicu
62. Olteanu Constantin

63. Dinică Zamfir
64. Militaru Marin
65. Cruceru Ilie
66. Iancu Ene
67. Ciobanu Florea
68. Cruceru Alexandru
69. Marin Coporâe
70. Crăcea Florea
71. Mirea Ion
72. Popa Stancu
73. Cercelaru Teodor
74. Alexandru Constantin
75. Marin A.I. Miu
76. Dobre Marin
77. Cosma Gheorghe

Să ne plecăm în fața lor și a multora ca ei, pentru sângele vărsat, cu care au scris pagini de glorie în istoria neamului. Noi, cei de astăzi și cei care vor veni după noi, să le mulțumim pentru moștenirea lăsată: o țară întregită, un neam iubitor și demn, un popor muncitor, răbdător, primitor și cu valori alese. Avem datoria să păstrăm aceste valori, să le îmbogățim, să nu le pierdem pe drum!

LA MULȚI ANI, ROMÂNIA!

Bibliografie

[1] F. Cârjan, *Să nu faci umbră pământului degeaba. Pagini din Monografia localității Potcoava*, Editura Casa Ciurea, 1999.

ARTICOLE ȘI NOTE MATEMATICE

Condiții ca un segment să fie linie mijlocie într-un triunghi

Corneliu UDREA[1] *și Marian HAIDUCU*[2]

1 Introducere

Punctul de plecare al acestor comentarii îl constituie o propunere de subiect pentru clasa a VII-a făcută organizatorilor Concursului Național ,,Mathematika-Olt" ediția 2013, [8], propunere prezentată în continuare.

Se consideră următoarea afirmație reciprocă a teoremei liniei mijlocii în triunghi:

"Dacă întru-un triunghi ABC, M este mijlocul laturii $[AB]$ și $N \in [AC]$ astfel încât $MN = \frac{1}{2}BC$, atunci N este mijlocul laturii $[AC]$."

(a) Arătați că această afirmație reciprocă nu este întotdeauna adevărată.

(b) Ce condiții trebuie adăugate în ipoteză pentru a face din afirmația dată un enunț întotdeauna adevărat? Justificați răspunsul.

Comisia de elaborare a subiectelor a reținut din enunțul formulat primul subpunct, justificarea fiind dată de un contraexemplu reluat și completat ulterior și în acest articol.

Observația 1. Sunt fixate unele notații folosite în continuare și sunt reamintite câteva proprietăți uzuale.

(i) Se va considera un triunghi (propriu) ABC și două puncte M, respectiv N pe segmentele (AB), respectiv (AC). În cazul în care M este mijlocul segmentului (AB) și N este mijlocul segmentului (AC), segmentul $[MN]$ se numeşte linie mijlocie a triunghiului ABC (corespunzătoare laturii $[BC]$).

În general notațiile folosite și reamintite aici sunt cele standard utilizate în manualele de geometrie [3], [2] și [7].

[1]Prof. univ. dr., Universitatea din Pitești, corneliu_udrea@yahoo.com

[2]Profesor, Școala Gimnazială ,,Mihai Eminescu", Pitești, marian.haiducu@yahoo.fr

(ii) În contextul precizat mai sus se consideră următoarele propoziții logice:

$$p : \text{"}N \text{ este mijlocul lui } [AC]\text{"} \ , \ q : \text{"}M \text{ este mijlocul lui } [AB]\text{"},$$

$$r : \text{"lungimea segmentului } [MN] \text{ este jumătate din lungimea segmentului } [BC]\text{"}$$

$$s : \text{"dreptele } MN \text{ și } BC \text{ sunt paralele"}.$$

(iii) Teorema liniei mijlocii într-un triunghi spune că "Orice linie mijlocie a unui triunghi este paralelă și jumătate din latura corespunzătoare". În cadrul fixat mai sus enunțul recapitulat anterior capătă forma "Dacă $[MN]$ este linie mijlocie în triunghiul ABC, atunci MN și BC sunt paralele și $[MN]$ este jumătate din $[BC]$" ceea ce, sub forma unei propoziții logice (cu notațiile fixate mai sus), se reprezintă

$$\text{"}p \wedge q \Rightarrow r \wedge s\text{"}.$$

Se știe că și reciproca teoremei enunțate (adică "Dacă MN și BC sunt paralele și $[MN]$ este jumătate din $[BC]$, atunci $[MN]$ este linie mijlocie în triunghiul ABC") este adevărată, adică propoziția

$$\text{"}r \wedge s \Rightarrow p \wedge q\text{"}$$

este adevărată. În definitiv cele două enunțuri sunt echivalente ceea ce se reprezintă sub forma

$$\text{"}p \wedge q \Leftrightarrow r \wedge s\text{"},$$

deci atât afirmația directă ("$p \wedge q \Rightarrow r \wedge s$"), cât și cea reciprocă ("$r \wedge s \Rightarrow p \wedge q$") sunt adevărate, ceea ce încheie discuția privind valorile de adevăr ale teoremei directe și teoremei reciproce în cazul menționat mai sus.

Observația 2. (i) Subiectul propus mai sus pune în evidență că enunțul "Dacă M este mijlocul segmentului $[AB]$ și N este pe $[AC]$ astfel încât dreptele MN și BC sunt paralele, atunci N este mijlocul segmentului $[AC]$ și $[MN]$ este jumătate din $[BC]$." este o propoziție adevărată, adică propoziția logică

$$\text{"}q \wedge s \Rightarrow p \wedge r\text{"}$$

este o propoziție adevărată.

(ii) În plus, cerința formulată mai sus (în propunerea de subiect amintită mai înainte) se referă la determinarea valorii de adevăr a reciprocei teoremei din (i) şi anume "Dacă N este mijlocul segmentului (AC) și $[MN]$ este jumătate din $[BC]$, atunci M este mijlocul segmentului $[AB]$ și dreptele MN și BC sunt paralele.", ceea ce formal este reprezentat de propoziția

$$\text{"}p \wedge r \Rightarrow q \wedge s\text{"}. \qquad (1.1)$$

Contraexemplul 1. *(i) Conform cu [2] se consideră triunghiul ABC dreptunghic în C în care măsura unghiului A este de $30°$, N este mijlocul lui $[AC]$, M este mijlocul lui $[AB]$ și M_1 este mijlocul lui $[AM]$ (a se vedea Figura 1.1).*

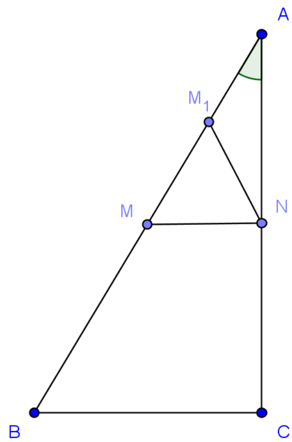

Figura 1.1: Contraexemplu.

Din condițiile impuse rezultă

$$BC = \frac{1}{2}AB = MC \Rightarrow NM_1 = NM = \frac{1}{2}BC$$

Așadar $M_1 \in (AB)$, $NM_1 = \frac{1}{2}BC$, dar M_1 nu este mijlocul segmentului $[AB]$ (și NM_1 nu este paralelă cu BC).

(ii) Fie triunghiul isoscel ABC cu $CA = CB$, N mijlocul segmentului $[AC]$ și M_1 mijlocul segmentului $[AB]$ (conform Figurii 1.2).

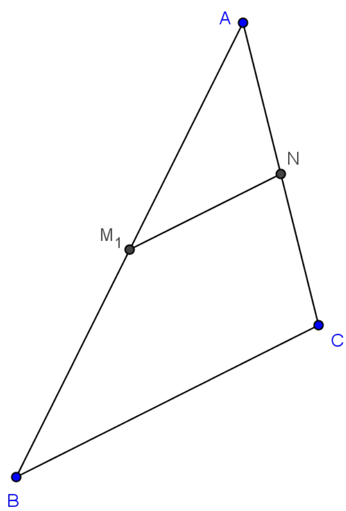

Figura 1.2

Din condițiile impuse rezultă că

$$M_1N = \frac{1}{2}BC = AN.$$

(a) Prin urmare pe segmentul $[AB]$ *se găsesc punctele* M_1 *şi* A *pentru care se verifică afirmațiile din propoziția* ”$p \wedge r$” *(adică propoziția* ”$p \wedge r$” *este adevărată) dar, din nou, pentru punctul* A *niciuna din propoziţiile* q *sau* s *nu este adevărată (deci, pentru* A*,* ”$p \wedge r \Rightarrow q \wedge s$” *este falsă).*

(b) Pe de altă parte M_1 *este singurul punct al segmentului* (AB) *pentru care propoziția* ”$p \wedge r$” *este adevărată, caz în care și propoziția* ”$q \wedge s$” *este adevărată și deci propoziția* ”$p \wedge r \Rightarrow q \wedge s$” *este adevărată.*

(c) În definitiv, valoarea de adevăr a propoziției notată (1.1) depinde și de poziția punctului M*, dacă el este pe segmentul închis* $[AB]$ *sau pe segmentul deschis* (AB)*.*

Observația 3. Conținutul acestui articol este legat de valoarea de adevăr a propoziției ”$p \wedge r \Rightarrow q \wedge s$” distingându-se (fără prea multe dificultăți) situaţiile în care punctul M este un punct al segmentului (AB) sau $[AB]$.

Lucrarea sintetizează rezultate (probabil cunoscute) ce caracterizează triunghiurile în care propoziția notată (1.1) este adevărată și se bizuie pe observaţia că verificarea afirmațiilor din propoziția logică $q \wedge s$ este echivalentă cu s, deci cu afirmația că $M = M_1$.

2 Caracterizarea triunghiurilor în care afirmația (1.1) este adevărată

Datele fixate anterior sunt în continuare aceleași și anume: ABC este un triunghi propriu și punctele N, respectiv M, sunt pe segmentele (AC), respectiv (AB) astfel încât N este mijlocul segmentului (AC) și $MN = \frac{1}{2}BC$. Se prezintă caracterizarea triunghiurilor ABC în care propoziția ”$p \wedge r \Rightarrow q \wedge s$” este adevărată, suficient găsirea acelor triunghiuri îndeplinind condițiile fixate pentru care M este mijlocul segmentului (AB) sau MN și BC sunt paralele.

Observația 4. (i) Notațiilor fixate anterior li se adaugă următoarele:

(a) M_1 este mijlocul segmentului (AB) și $\rho := \frac{1}{2}BC = MN = M_1N$;

(b) pentru un punct P din plan și $l \in (0, \infty)$, $\mathcal{C}(P, l)$ notează cercul de centru P și rază l (adică $\mathcal{C}(P, l) := \{Q : PQ = l\}$) în raport cu care se disting mulțimile plane Int $\mathcal{C}(P, l)$, respectiv Ext $\mathcal{C}(P, l)$, punctele din plan interioare, respectiv exterioare cercului $\mathcal{C}(P, l)$, adică mulţimile $\{Q : PQ < l\}$, respectiv $\{Q : PQ > l\}$.

(ii) În lucrare sunt folosite rezultate elementare de geometrie plană (cum ar fi cele legate de poziția unei drepte față de un cerc) dintre care sunt reamintite aici teorema cosinusului, respectiv formula medianei, și anume

$$\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC},$$

unde $\cos A$ este cosinusul unghiului $\widehat{BAC}$ al triunghiului ABC, respectiv

$$BN^2 = \frac{2(BA^2 + BC^2) - AC^2}{4}.$$

(iii) Utilă va fi și observația conținută în lema următoare.

Lema 1. *Dacă în triunghiul ABC este îndeplinită relația*

$$2AB^2 + BC^2 \leq AC^2$$

și $A' \in BC$ este piciorul înălțimii dusă din A în triunghiul ABC, atunci

$$AA' \leq BC.$$

Demonstrație.

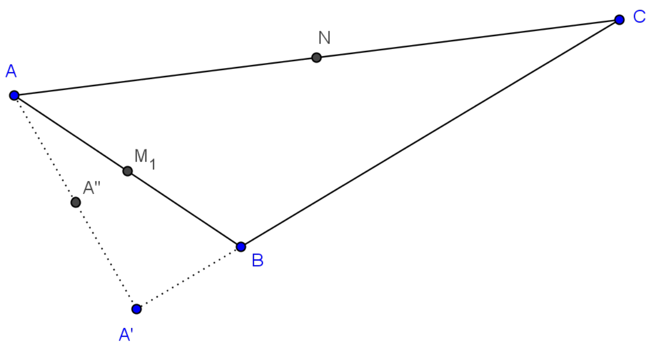

Figura 2.1

Folosind relația asumată în ipoteza lemei se obțin următoarele afirmații:

(1) $\cos B = \frac{BA^2+BC^2-AC^2}{2BA \cdot BC} \leq -\frac{AB}{2BC} < 0$, ceea ce, în particular, înseamnă că unghiul B al triughiului ABC este obtuz;

(2) $BN^2 = \frac{2(BA^2+BC^2)-AC^2}{4}$, $NM_1 = \frac{1}{2}BC$ și
$BN \leq M_1N \Leftrightarrow \frac{2(AB^2+BC^2)-AC^2}{4} \leq \frac{BC^2}{4}$.

Cum ultima relație este echivalentă cu $2AB^2+BC^2 \leq AC^2$ (adevărată conform ipotezei) rezultă că $BN \leq M_1N$.

Pe de altă parte, dacă A'' este mijlocul segmentului (AA') (a se vedea Figura 2.1), atunci

$$A''N \parallel A'C, \; A''A' \perp A'C \text{ și}$$

$$\frac{1}{2}AA' = A'A'' \leq BN \leq M_1N = \frac{1}{2}BC \Rightarrow AA' \leq BC.$$

□

Observația 5. (i) Ușor de remarcat că dacă în triunghiul ABC este verificată inegalitatea strictă (adică $2AB^2 + BC^2 < AC^2$), atunci

$$BN < M_1N \text{ și } AA' < BC.$$

(ii) (a) Fie a, b, c numere reale strict pozitive. Există un triunghi ABC astfel încât $a = BC$, $b = AC$ și $c = AB$ și $2AB^2 + BC^2 \leq AC^2$ (respectiv $2AB^2 + BC^2 < AC^2$) dacă și numai dacă $2c^2 + a^2 \leq b^2 < (a + c)^2$ (respectiv $2c^2 + a^2 < b^2 < (a + c)^2$), ceea ce este totuna cu a spune că $b \in [\sqrt{a^2 + 2c^2}, a + c)$ (respectiv $b \in (\sqrt{a^2 + 2c^2}, a + c)$) și $c < 2a$.

(b) Remarca stabilită în (a) arată că există triunghiuri ABC care îndeplinesc ipotezele lemei anterioare; spre exemplu luând segmentele de lungime $a = 2$, $c = 2$ și $b = \sqrt{12}$ (respectiv $b = \sqrt{13}$) există un triunghi ABC în care $BC = 2$, $AB = 2$ și $AC = \sqrt{12}$ (respectiv $AC = \sqrt{13}$) în care $2AB^2 + BC^2 = 12 = AC^2$ (respectiv $2AB^2 + BC^2 = 12 < 13 = AC^2$).

(c) În general, în situația în care $a, c \in (0, \infty)$ și $c < 2a$ se obține $\frac{c}{2a} \in (0, 1)$ şi construind segmentele $AB = c$ și $BC = a$ astfel încât unghiul dintre ele (notat B) să îndeplinească condiţia $\cos B = -\frac{c}{2a}$ (respectiv $\cos B < -\frac{c}{2a}$) din teorema cosinusului rezultă $2AB^2 + BC^2 = AC^2$ (respectiv $2AB^2 + BC^2 < AC^2$).

Teorema 1. *În condițiile fixate anterior, următoarele afirmații sunt echivalente.*

(i) Dreptele MN și BC sunt paralele (adică este adevărată afirmația notată (1.1)).

(ii) Triunghiul ABC verifică una din următoarele proprietăți. (a) Triunghiul ABC este dreptunghic în B. (b) Are loc inegalitatea $AC \leq BC$. (c) Este verificată relația $2AB^2 + BC^2 \leq AC^2$.

Observația 6. Se constată ușor că un triunghi care verifică una din proprietățile din punctul (ii) al teoremei precedente este dreptunghic în B (în cazul (a)), are unghiul din B ascuțit (în cazul (b)), respectiv obtuz (în cazul (c)). Prin urmare triunghiul ABC poate verifica cel mult una din proprietățile enunțate.

Demonstraţie. Demonstrație sintetică a Teoremei 1.
(i)⇒(ii). Conform ipotezei anunțate și remarcelor anterioare, punctul M coincide cu M_1. Ca mai înainte fie $M_2 \neq M_1$ astfel încât

$$\{M_1\} \subseteq AB \cap \mathcal{C}(N, \rho) \subseteq \{M_1, M_2\}.$$

Cazul 1. Dacă $AB \cap \mathcal{C}(N, \rho) = \{M_1\} = \{M\}$, atunci AB este tangentă la cercul $\mathcal{C}(N, \rho)$ în punctul $M = M_1$ (Figura 2.2) și $M_1N \parallel BC$. Prin urmare unghiul din B este drept.

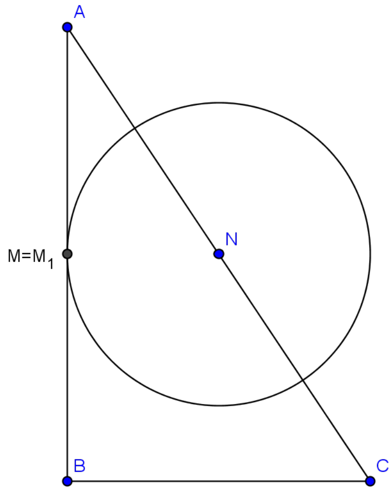

Figura 2.2

Cazul 2. Fie acum $AB \cap \mathcal{C}(N,\rho) = \{M_1, M_2\}$. Conform ipotezei $M \in (AB)$ și $MN \parallel BC$, deci $M = M_1$ și $M_2 \notin (AB)$. Se disting următoarele situații.

Cazul 2α. Se presupune că $A \in (MM_2]$ (adică pe dreapta AB, punctele A și M_2 sunt așezate pe semidreapta opusă semidreptei $[M_1B$; Figura 2.3)

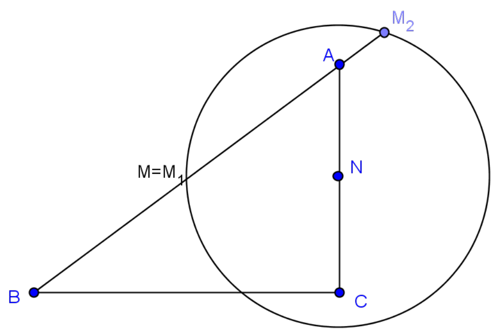

Figura 2.3

Atunci $A \in \{M_2\} \cup \operatorname{Int} \mathcal{C}(N,\rho)$ și

$$NA \leq \rho \Leftrightarrow AC \leq BC,$$

prin urmare este îndeplinită proprietatea (i)(b).

Cazul 2β. Fie acum $B \in (M_1M_2]$ (Figura 2.4).

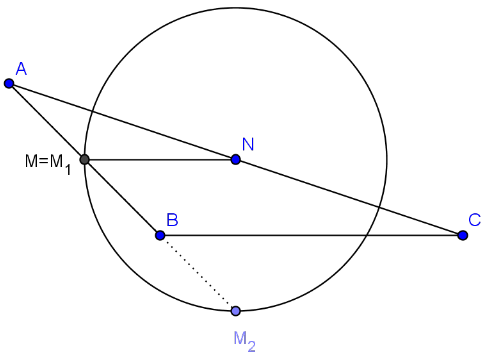

Figura 2.4

În această situație $A \in \operatorname{Ext} \mathcal{C}(N,\rho)$ și $B \in \operatorname{Int} \mathcal{C}(N,\rho) \cup \{M_2\}$. Din formula medianei

$$BN \leq \rho = M_1N \Leftrightarrow \frac{2(AB^2+BC^2)-AC^2}{4} \leq \frac{BC^2}{4}$$

și ultima inegalitate înseamnă $2AB^2 + BC^2 \leq AC^2$, deci se verifică proprietatea (ii)(c).

(ii)$\Rightarrow$(i) (a) Dacă triunghiul ABC este dreptunghic în B (Figura 2.2), atunci $NM_1 \perp AB$, deci AB este tangenta cercului $\mathcal{C}(N,\rho)$ în punctul M_1 și

$$AB \cap \mathcal{C}(N,\rho) = \{M_1\} \Rightarrow M = M_1 \text{ și } MN \parallel BC.$$

(b) Se consideră acum $AC \leq BC$ (ceea ce, în particular, impune că unghiul din B al triunghiului ABC este un unghi ascuțit). A se vedea Figura 2.3. În plus $AN \leq \rho$, $A \in \mathcal{C}(N,\rho) \cup \operatorname{Int} \mathcal{C}(N,\rho)$, prin urmare $M_2 \in [M_1A$. În definitiv $M_2 \notin (AB)$ și

$$M = M_1, \ MN \parallel BC.$$

(c) Se presupune acum îndeplinită inegalitatea din (ii)(c); în particular, după cum s-a mai observat, unghiul din B al triunghiului ABC este obtuz. În plus, (Figura 2.4),

$$\rho = M_1N = \frac{1}{2}BC < \frac{1}{2}AC = AN \Rightarrow A \in \operatorname{Ext} \mathcal{C}(N,\rho) \text{ și } (MA] \subset \operatorname{Ext} \mathcal{C}(N,\rho).$$

Pe de altă parte după cum s-a remarcat în demonstraţia implicației (i)$\Rightarrow$(ii) (Cazul 2β)

$$BN^2 \leq M_1N^2 \Leftrightarrow 2AB^2 + BC^2 \leq AC^2,$$

deci $BN \leq M_1N$, $(M_1B) \subset \operatorname{Int} \mathcal{C}(N,\rho)$ și $B \in (M_1M_2]$. În definitiv $M_2 \notin (AB)$, ceea ce înseamnă

$$M = M_1 \text{ și } MN \parallel BC.$$

$\square$

Observația 7. Verificarea inegalităților stricte în condițiile (b), respectiv (c) din punctul (ii) al Teoremei 1 duce la un enunț similar cu acela din teorema citată dacă punctul M din ipoteză se consideră pe segmentul închis $[AB]$.

Demonstraţie. Demonstrație analitică a Teoremei 1.

Notațiile fixate și condițiile impuse anterior sunt în continuare folosite. În plus se alege sistemul ortogonal de axe xOy astfel încât $O = M_1$, $Ox = M_1N$ și punctul A să fie situat în semiplanul superior determinat de axa Ox(adică $y_A > 0$). Ținând cont de relațiile (datele) fixate în ipoteza Teoremei 1, punctele considerate sunt

$$A(\epsilon a, h),\ N(\delta\rho, 0),\ B(-\epsilon a, -h),\ C(2\delta\rho - \epsilon a, -h) \text{ și } A'(\epsilon a, -h),$$

unde A' este piciorul înălţimii triunghiului ABC dusă din A, $a \in [0, \infty)$, $h \in (0, \infty)$ și ϵ, $\delta \in \{-1, 1\}$.

Se reamintește că

$$\rho = MN = M_1N = \frac{1}{2}BC \text{ și } AN = \frac{1}{2}AC.$$

Cazul 1. Se presupune că $\mathcal{C}(N, \rho) \cap AB = \{M_1\}$. (Figura 2.2')

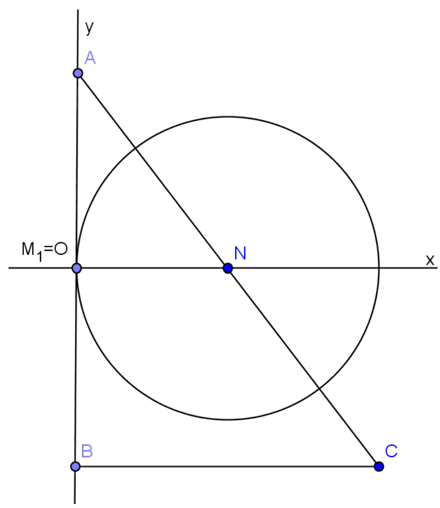

Figura 2.2'

Evident condiția impusă este echivalentă cu proprietatea dreptei AB de a fi tangenta cercului $\mathcal{C}(N, \rho)$ în punctul $M_1 = O$ (deci $AB = Oy$) ceea ce este totuna cu a spune că unghiul din B al triunghiului ABC este un unghi drept.

Prin urmare, în acest caz, afirmația (i) este echivalentă cu (ii)(a).

Cazul 2. Fie $\mathcal{C}(N,\rho)\cap AB=\{M_1,M_2\}$. Coordonatele punctelor M_1 și M_2 sunt date de soluțiile sistemului

$$\begin{cases} (x-\delta y)^2+y^2=\rho^2 \\ y=\frac{h}{\epsilon a}x \end{cases}$$

(sistem definit de ecuația cercului $\mathcal{C}(N,\rho)$ și ecuația dreptei AB, a fiind, în acest caz, nenul). Punctele căutate sunt

$$M_1(0,0)=O \text{ și } M_2\left(\frac{2\delta\rho a^2}{a^2+h^2},\frac{2\epsilon\delta\rho h a}{a^2+h^2}\right).$$

Cazul 2α. Se consideră $\epsilon\delta=1$ ceea ce corespunde situației în care unghiul din B al triunghiului ABC este ascuțit, echivalent cu a spune că punctele A și N se găsesc în același semiplan determinat de axa Oy (Figura 2.3').

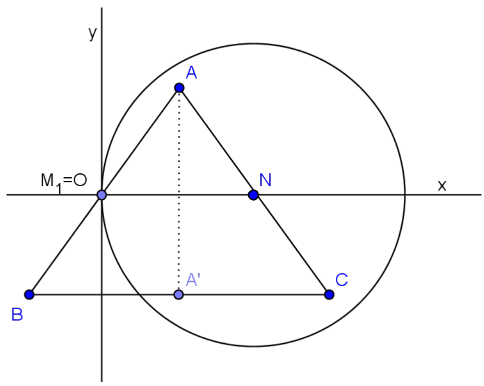

Figura 2.3'

Se presupune $\epsilon=1$ (deci $\delta=1$). Proprietatea $\mathcal{C}(N,\rho)\cap(AB)=\{M_1\}$ este totuna cu proprietatea că $M_2\notin(AB)$.

În situația fixată se observă că $x_B<0<x_{M_2}=\frac{2\rho a^2}{a^2+h^2}$. Atunci

$$M_2\notin(AB)\Leftrightarrow x_A\le x_{M_2} \text{ sau } y_A\le y_{M_2}\Leftrightarrow a^2+h^2\le 2a\rho.$$

Ținând cont că

$$\rho=\frac{1}{2}BC,\ h=\frac{1}{2}AA' \text{ și } a=\frac{1}{2}A'B \tag{2.1}$$

și adăugând relația $A'B=AB\cos B$ și teorema lui Pitagora, din ultima inegalitate de mai sus, rezultă

$$AB^2=A'B^2+A'A^2\le 2BC\cdot A'B\Leftrightarrow AB^2\le 2BC\cdot AB\cos B.$$

Folosind teorema cosinusului $\mathcal{C}(N,\rho)\cap(AB)=\{M_1\}$ revine la

$$AB^2 \le 2AB\cdot BC\cdot\frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}\Leftrightarrow AC^2\le BC^2.$$

În definitiv în această situație enunțurile (i) şi (ii)(b) sunt echivalente.

Dacă $\epsilon=-1$ (deci $\delta=-1$) condiția $M_2\notin(AB)$ revine la aceiași inegalitate ca mai sus.

Cazul 2β. Pentru $\epsilon\delta=-1$, ceea ce corespunde situației în care unghiul din B al triunghiului ABC este obtuz, echivalent cu a spune că punctele A și N sunt în semiplane diferite determinate de axa Oy, fie $\epsilon=-1$ (Figura 2.4').

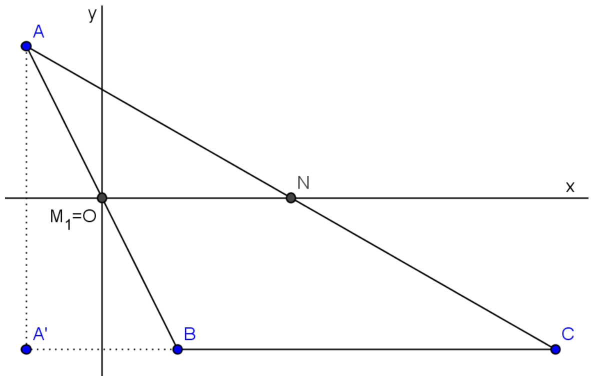

Figura 2.4'

Proprietatea $\mathcal{C}(N,\rho)\cap(AB)=\{M_1\}$ revine la condiția $M_2\notin(AB)$. În acest caz $x_A<0<x_{M_2}=\frac{2\rho a}{a^2+h^2}$. Atunci

$$M_2\notin(AB)\Leftrightarrow x_B\le x_{M_2} \text{ sau } y_{M_2}\le y_B\Leftrightarrow a^2+h^2\le 2a\rho.$$

Folosind din nou relațiile (2.1), egalitatea $A'B=-AB\cos B$ și teorema lui Pitagora, inegalitatea ultimă devine

$$AB^2=A'A^2+A'B^2\le 2BC\cdot A'B\Leftrightarrow AB^2\le -2AB\cdot BC\cos B.$$

Din teorema cosinusului, ultima inegalitate este echivalentă cu

$$AB^2\le 2AB\cdot BC\frac{AC^2-AB^2-BC^2}{2AB\cdot BC}\Leftrightarrow 2AB^2+BC^2\le AC^2,$$

deci

$$\mathcal{C}(N,\rho)\cap(AB)=\{M_1\}\Leftrightarrow 2AB^2+BC^2\le AC^2.$$

Prin urmare, în acest caz, afirmația (i) este echivalentă cu (ii)(c).

Luând $\epsilon=+1$, ca și mai sus, se ajunge la aceeași inegalitate. $\square$

Bibliografie

[1] D. Brânzei, *Geometrie Circumstanțială*, Editura Junimea, Iași, 1983.

[2] A. Coța, M. Rado, E. Kurthy, E.F. Popa, M. Rado, M. Răduțiu, F. Vornicescu, *Matematică. Geometrie și trigonometrie. Manual pentru clasa a X-a*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1993.

[3] A. Coța, M. Rado, M. Răduțiu, F. Vornicescu, *Matematică. Geometrie și trigonometrie. Manual pentru clasa a IX-a*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1993.

[4] J. Hadamard, *Lecții de Geometrie Elementară: Geometrie Plană*, Editura Tehnică, București, 1962.

[5] C. Năstăsescu, C. Niță, C. Vraciu, *Aritmetică și Algebră*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1993.

[6] G. Țițeica, *Probleme de Geometrie*, Editura Tehnică, București, 1981.

[7] C. Udriște, V. Tomulescu, Gh. Vernic, *Matematică. Geometrie analitică. Manual pentru clasa a XI-a*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1992.

[8] Concursul Național „Mathematika-Olt”, Slatina, Ediția a X-a, 31.05.2013, http://didactika.files.wordpress.com/2013/06/sub-barem-cls-7-2013.pdf

Aplicații ale unei proprietăți a cercului adjunct unui triunghi

Ion PĂTRAȘCU[1]

În acest articol enunțăm și demonstrăm o lemă în legătură cu cercul adjunct unui triunghi și folosim această lemă în rezolvarea unor probleme care vizează calculul unor măsuri de unghiuri formate de anumite ceviene într-un triunghi dat.

Sunt necesare anumite precizări și definiții pe care le enunțăm în cele ce urmează.

Definiția 1. *Se numește* ***cerc adjunct*** *al unui triunghi, cercul care trece prin două vârfuri ale triunghiului și este tangent într-unul dintre ele la latura triunghiului.*

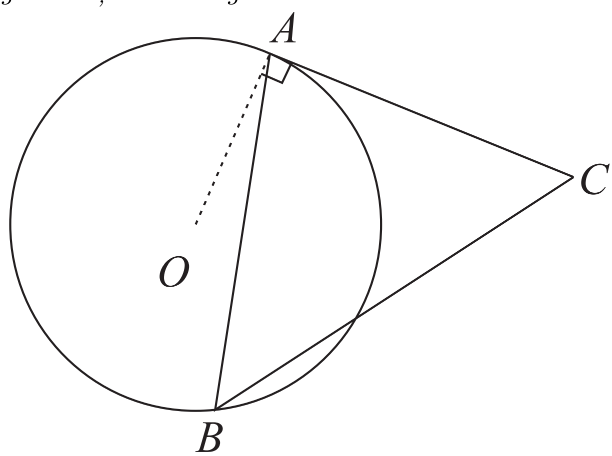

Figura 1

Observația 1. În Figura 1 este reprezentat cercul adjunct care trece prin vârfurile B și A ale triunghiului ABC, iar în A este tangent laturii AC.

Vom nota acest cerc $\left(B\bar{A}\right)$.

Unui triunghi îi corespund, în general, 6 cercuri adjuncte.

Definiția 2. *Se numește* ***ceviană*** *într-un triunghi o dreaptă care trece printr-un vârf al triunghiului și intersectează latura opusă acestuia într-un punct diferit de celelalte două vârfuri.*

[1]Profesor, Colegiul National ,,Frații Buzești", Craiova, patrascu_ion@yahoo.com

Definiția 3. *Două ceviene ale unui triunghi care sunt simetrice în raport cu bisectoarea interioară a triunghiului cu care au vârful comun se numesc* ***ceviene izogonale****.*

Propoziția 1. *Într-un triunghi dat înălțimea și raza cercului circumscris determinată de vârful înălțimii sunt ceviene izogonale.*

Demonstrația acestei propoziții ca și a reciprocelor ei o lăsăm ca exercițiu pe seama cititorului.

Lema 1. *Fie ABC un triunghi cu $m(\sphericalangle C) \neq 90°$. Cercul adjunct $\left(B\bar{A}\right)$ intersectează a doua oară înălțimea din A a triunghiului într-un punct ce aparține diametrului determinat de vârful B în cercul circumscris triunghiului.*

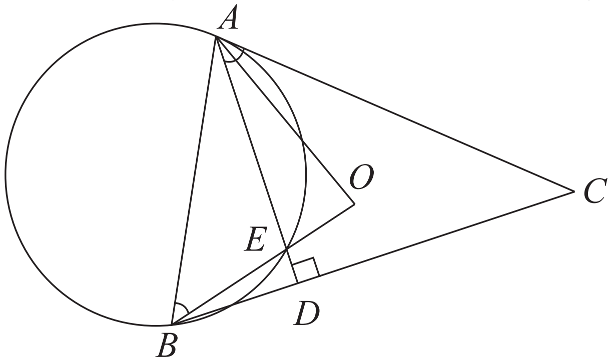

Figura 2

Demonstrație. Considerăm ABC triunghi ascuțitunghic. Notăm cu E al doilea punct de intersecție a cercului adjunct $\left(B\bar{A}\right)$ cu înălțimea AD a triunghiului ABC (vezi Figura 2). Avem

$$\sphericalangle ABE \equiv \sphericalangle DAC. \tag{1}$$

Fie O centrul cercului circumscris triunhiului ABC. Conform Propoziției 1, avem:

$$\sphericalangle BAO \equiv \sphericalangle DAC. \tag{2}$$

Relațiile (1) și (2) conduc la:

$$\sphericalangle ABE \equiv \sphericalangle BAO. \tag{3}$$

Dar $OA = OB$, ca raze, și

$$\sphericalangle ABO \equiv \sphericalangle BAO. \tag{4}$$

Obținem astfel, din relațiile (3) și (4) și din faptul că O este în interiorul triunghiului ABC, ca și punctul E, că O aparține dreptei BE, deci E aparține diametrului dus prin B în cercul circumscris.

Proprietatea se demonstrează în același mod dacă triunghiul ABC este obtuzunghic. □

Lema 2 (**Reciproca Lemei 1**). *Dacă în triunghiul ABC cu $m(\sphericalangle C) \neq 90°$ diametrul determinat de B în cercul circumscris triunghiului intersectează a doua oară cercul adjunct $(B\bar{A})$ în punctul M, atunci AM este înălțime în triunghiul ABC.*

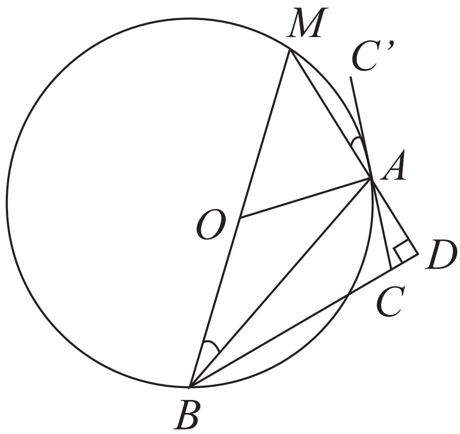

Figura 3

Demonstrație. Considerăm triunghiul ABC cu $m(\sphericalangle C) > 90°$ (vezi Figura 3). Fie C' un punct pe $(CA$, A între C și C' și O centrul cercului circumscris triunghiului ABC. Avem

$$\sphericalangle ABM \equiv \sphericalangle MAC', \tag{5}$$

$$\sphericalangle MAC' \equiv \sphericalangle CAD, \tag{6}$$

unde $\{D\} = MA \cap BC$.

Cum $OB = OA$, rezultă

$$\sphericalangle OBA \equiv \sphericalangle OAB. \tag{7}$$

Din relațiile (5), (6), (7) obținem că:

$$\sphericalangle OAB \equiv \sphericalangle CAD.$$

Dar $m(\sphericalangle AOB) = 360° - 2m(\sphericalangle ACB)$, deci

$$m(\sphericalangle CAD) = m(\sphericalangle OAB) = m(\sphericalangle ACB) - 90°.$$

Obținem că $m(\sphericalangle CAD) = 90°$, deci $AM \perp BC$.

Proprietatea se demonstrează în același mod dacă $m(\sphericalangle C) < 90°$. □

Consecința 1. *Dacă ABC este un triunghi în care cercurile adjuncte $(B\bar{A})$ și $(C\bar{A})$ intersectează a doua oară înălțimea din A în punctele E respectiv F, atunci dreptele BE și CF sunt concurente în centrul O al cercului circumscris triunghiului ABC.*

Demonstrația rezultă imediat aplicând Lema 1.

Observația 2. Cercurile $\left(B\bar{A}\right)$ și $\left(C\bar{A}\right)$ se numesc ***cercuri adjuncte gemene***. Ele se intersectează a doua oară într-un punct ce aparține simedianei din A a triunghiului ABC. Simediana este izogonala medianei într-un triunghi.

Consecința 2. *Dacă ABC este un triunghi isoscel, $AB = AC$, atunci cercurile adjuncte $\left(B\bar{A}\right)$ și $\left(C\bar{A}\right)$ se intersectează a doua oară în centrul cercului circumscris triunghiului ABC.*

Demonstrația rezultă din Consecința 1 și din faptul că centrul cercului circumscris triunghiului ABC este situat pe înălțimea din vârful A.

Observația 3. În legătură cu cercurile adjuncte $\left(A\bar{B}\right)$ și $\left(A\bar{C}\right)$, este adevărată următoarea propoziție: Cercurile adjuncte $\left(A\bar{B}\right)$ și $\left(A\bar{C}\right)$ ale triunghiului ABC se intersectează a doua oară într-un punct ce aparține medianei din A (vezi [3]).

Consecința 3. *Dacă ABC este un triunghi isoscel, $AB = AC$ și O este centrul cercului său circumscris, atunci cercul adjunct $\left(B\bar{A}\right)$ al triunghiului ABC coincide cu cercul circumscris triunghiului ABO.*

Demonstrația rezultă imediat din Consecința 2.

Consecința 4. *Dacă ABC este un triunghi isoscel, $AB = AC$, atunci cercul adjunct $\left(A\bar{B}\right)$ conține ortocentrul triunghiului.*

Demonstrație. Aplicăm Lema 1 pentru cercul adjunct $\left(A\bar{B}\right)$ rezultă că acesta intersectează înălțimea din B a triunghiului într-un punct ce se află pe diametrul determinat de A în cercul circumscris triunghiului ABC. Acest diametru conține înălțimea din A a triunghiului. Deci punctul de concurență a înălțimii din B și a înălțimii din A, ortocentrul triunghiului ABC, este pe cercul adjunct $\left(A\bar{B}\right)$. □

Observația 4. Dacă ABC este triunghi isoscel, $AB = AC$, atunci cercurile sale adjuncte $\left(A\bar{B}\right)$ și $\left(A\bar{C}\right)$ se intersectează a doua oară în ortocentrul triunghiului.

Aplicații

Aplicația 1. *Într-un triunghi ABC cercul adjunct $\left(B\bar{A}\right)$ trece prin centrul cercului circumscris triunghiului. Demonstrați că $AB = AC$. (Ion Pătrașcu)*

Soluție. Considerăm ABC triunghi ascuțitunghic (vezi Figura 4). Dacă O, centrul cercului său circumscris, aparține cercului adjunct $\left(B\bar{A}\right)$, avem

$$\sphericalangle ABO \equiv \sphericalangle OAC. \tag{8}$$

Pe de altă parte, $OA = OB$ implică

$$\sphericalangle ABO \equiv \sphericalangle OAB. \tag{9}$$

Relațiile (8) și (9) conduc la

$$\sphericalangle OAB \equiv \sphericalangle OAC.$$

Din congruența triunghiurilor isoscele OAB și OAC obținem $AB = AC$.

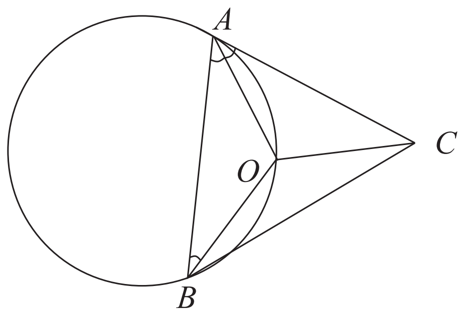

Figura 4

Problema se rezolvă în același mod dacă triunghiul ABC este obtuzunghic sau dreptunghic.

Aplicația 2. *Dacă în triunghiul ABC nedreptunghic cercul adjunct $\left(A\bar{B}\right)$ trece prin ortocentru, atunci $AB = AC$. (Ion Pătrașcu)*

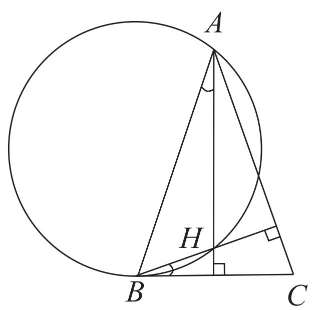

Figura 5

Soluție. Considerăm triunghiul ABC ascuțitunghic în care H este ortocentru (vezi Figura 5). Avem

$$\sphericalangle CBH \equiv \sphericalangle BAH.$$

Complementele acestor unghiuri sunt $\sphericalangle ACB$, respectiv $\sphericalangle ABC$, care vor fi de asemenea congruente și în consecință $AB = AC$.

Dacă triunghiul ABC este obtuzunghic (vezi Figura 6), atunci

$$\sphericalangle BHA \equiv \sphericalangle ABC.$$

Dar $\sphericalangle BHA \equiv \sphericalangle BCA$ (unghiuri cu laturi respectiv perpendiculare). Relațiile precedente conduc la $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle BCA$, deci $AB = AC$.

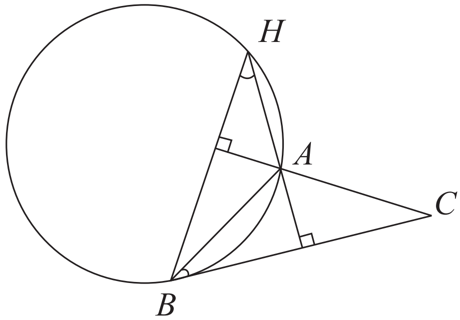

Figura 6

Aplicația 3. *În triunghiul ABC, $m(\sphericalangle B) = 80°$ $m(\sphericalangle C) = 30°$. Punctul M este în interiorul triunghiului ABC astfel ca $m(\sphericalangle MCA) = 10°$ și $m(\sphericalangle MBA) = 20°$. Arătați că $(AM$ este bisectoarea unghiului BMC.*

O.J.M. 2018, clasa a VII-a

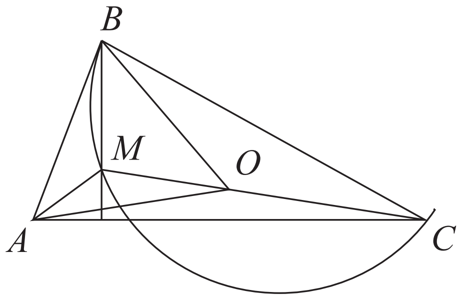

Figura 7

Soluție. Deoarece $m(\sphericalangle A) = 70°$ și $m(\sphericalangle MBA) = 20°$ rezultă că BM este înălțimea din B a triunghiului ABC. Având $m(\sphericalangle ABM) = m(\sphericalangle MCB) = 20°$, rezultă că cercul circumscris triunghiului MBC este cercul adjunct $\left(C\bar{B}\right)$ al triunghiului ABC (vezi Figura 7). Aplicând Lema 1 obținem că O, centrul cercului circumscris triunghiului ABC, aparține dreptei CM.

Deoarece $m(\sphericalangle ABO) = 60°$ și $OB = OA$, triunghiul OAB este echilateral. Observăm că $m(\sphericalangle MBO) = m(\sphericalangle MOB) = 40°$, deci $MB = MO$.

Relațiile $AB = AO$ și $MB = MO$ arată că AM este mediatoarea segmentului BO. Deoarece ea este mediatoare în triunghiul isoscel BMO, avem că ea este și bisectoare, ceea ce încheie rezolvarea.

Aplicația 4. *În triunghiul ABC, M este un punct interior astfel ca $m(\sphericalangle MAB) = 10°$, $m(\sphericalangle MBA) = 20°$, $m(\sphericalangle MCA) = 30°$ și $m(\sphericalangle MAC) = 40°$. Determinați măsura unghiului MBC.*

Berkeley Math Circle, Monthly Contest 4/2016

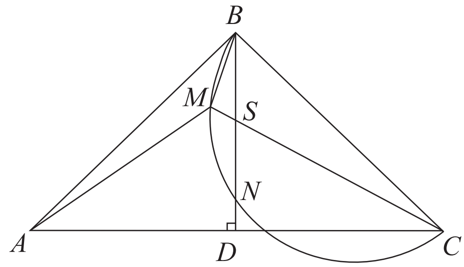

Figura 8

Soluție. Construim înălțimea BD și cercul adjunct $\left(C\bar{B}\right)$(vezi Figura 8).

Măsura unghiului A este de $50°$, deci $m\left(\sphericalangle ABD\right) = 40°$. Cum $m\left(\sphericalangle ABM\right) = 20°$, rezultă că BM este bisectoarea unghiului ABD.

Notăm cu N al doilea punct de intersecție al cercului adjunct cu BD și cu S intersecția dreptelor BD și CM. Deoarece $m\left(\sphericalangle AMC\right) = 110°$, avem $m\left(\sphericalangle AMS\right) = 90° + \frac{m(\sphericalangle ABS)}{2}$, de unde rezultă că M este centrul cercului înscris în triunghiul ABS. Atunci (AM este bisectoarea $\sphericalangle BAS$, deci $m\left(\sphericalangle MAS\right) = 10°$ și prin urmare $m\left(\sphericalangle SAC\right) = 30°$. Din $m\left(\sphericalangle SAC\right) = m\left(\sphericalangle SCA\right) = 30°$ rezultă că $SA = SC$, deci triunghiul ASC este isoscel. Cum $SD \perp AC$, rezultă că D este mijlocul lui $[AC]$, deci triunghiul ABC este isoscel. Atunci $m\left(\sphericalangle A\right) = m\left(\sphericalangle C\right) = 50°$ și $m\left(\sphericalangle ABC\right) = 80°$. Obținem imediat că $m\left(\sphericalangle MBC\right) = 60°$.

Observația 5. Din Consecința 2 rezultă că punctul N este centrul cercului circumscris triunghiului ABC.

Aplicația 5. *În triunghiul* ABC, $m\left(\sphericalangle A\right) = 70°$ *și* $m\left(\sphericalangle C\right) = 50°$. *Punctul* M *este în interiorul triunghiului* ABC, $m\left(\sphericalangle MBA\right) = 20°$ *și* $m\left(\sphericalangle MAC\right) = 30°$. *Demonstrați că* $BM \perp AC$. *(Ion Pătrașcu)*

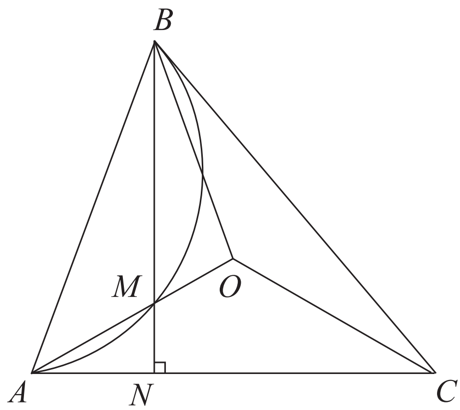

Figura 9

Soluție. Observăm că $m\left(\sphericalangle MAB\right) = m\left(\sphericalangle MBC\right) = 40°$, prin urmare cercul circumscris triunghiului ABM este chiar cercul adjunct $\left(A\bar{B}\right)$ (vezi Figura 9).

Notăm cu O centrul cercului circumscris triunghiului ABC. Triunghiul fiind ascuțitunghic, avem că $m(\sphericalangle AOC) = 120°$, ceea ce implică $m(\sphericalangle OAC) = 30°$, prin urmare $M \in AO$. De asemenea, observăm că $m(\sphericalangle OBC) = m(\sphericalangle MBA) = 20°$, de unde rezultă că cevienele OB și BM sunt izogonale și cum OB este rază, BM va fi înălțime în triunghiul ABC.

Aplicația 6. *Fie ABC un triunghi cu $AB = AC$ și $m(\sphericalangle A) = 80°$. Fie punctul M în interiorul triunghiului astfel ca $m(\sphericalangle MBC) = 30°$ și $m(\sphericalangle MCB) = 10°$. Calculați $m(\sphericalangle AMC)$.*

I. Saryguin

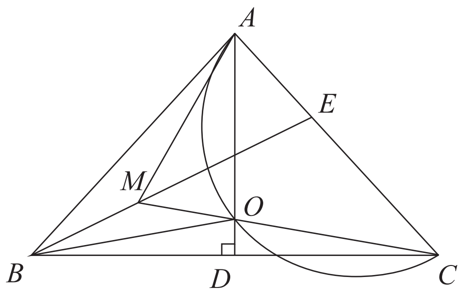

Figura 10

Soluție. Triunghiul ABC fiind isoscel, centrul O al cercului său circumscris se află la intersecția cercului adjunct $\left(C\bar{A}\right)$ cu înălțimea (AD) (vezi Figura 10).

Deoarece $m(\sphericalangle BOC) = 2m(\sphericalangle A) = 160°$, avem că $m(\sphericalangle OCB) = 10°$ și astfel $M \in CO$. Unghiul MOB este exterior triunghiului OBC, prin urmare $m(\sphericalangle MOB) = 20°$. Dar și $m(\sphericalangle MBO) = 20°$, deci $MB = MO$. Notăm $\{E\} = BM \cap AC$. Observăm că triunghiul ABE este isoscel, $BA = BE$. De asemenea, triunghiul MEC este isoscel, deoarece $m(\sphericalangle EMC) = m(\sphericalangle ECM) = 40°$, deci $ME = EC$. Din $AC = BE$ și relația precedentă găsim că $AE = BM$, prin urmare $AE = MO$.

Avem $\triangle AMO \equiv \triangle MAE$, deoarece $m(\sphericalangle AOM) = m(\sphericalangle MEA) = 80°$, AM este latură comună și $MO = AE$. Obținem de aici că $OA = EM$. Triunghiurile AOC și MEC sunt isoscele, au $OA = ME$ și unghiul din C comun, prin urmare sunt congruente, deci $AC = MC$. Astfel triunghiul ACM este isoscel, de unde obținem că $m(\sphericalangle AMC) = 70°$.

Aplicația 7. *Fie ABC un triunghi cu $m(\sphericalangle A) = 70°$ și $m(\sphericalangle B) = 65°$. Considerăm punctul M în interiorul triunghiului astfel ca $m(\sphericalangle MCB) = 20°$ și $m(\sphericalangle MAB) = 25°$. Cercul circumscris triunghiului AMC intersectează a doua oară BC în E. Demonstrați că centrul cercului circumscris triunghiului ABC este intersecția dreptelor AE și CM. (Ion Pătrașcu)*

Soluție. Cercul circumscris triunghiului AMC este cercul adjunct $\left(C\bar{A}\right)$, deoarece $m(\sphericalangle MCA) = m(\sphericalangle MAB) = 25°$. Pe de altă parte, avem $AM \perp BC$. Notăm

$\{D\} = AM \cap BC$ (vezi Figura 11). Conform Lemei 1, $O \in CM$, unde O este centrul cercului circumscris triunghiului ABC. Deoarece $\sphericalangle MAE \equiv \sphericalangle MCE$ (punctele A, M, E, C fiind pe cercul adjunct), avem că $m\left(\sphericalangle MAE\right) = 20°$, de unde obținem că $m\left(\sphericalangle EAC\right) = 25°$. Astfel dreptele AD și AE sunt ceviene izogonale în triunghiul ABC. Cum AD este înălțime, rezultă că AE conține centrul O și astfel obținem că $\{O\} = AE \cap CM$.

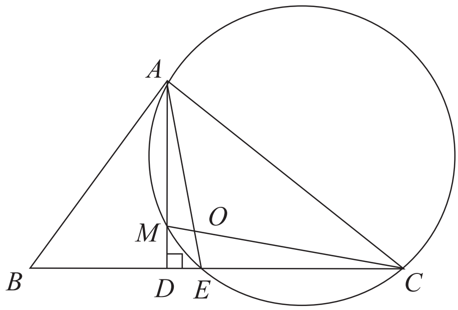

Figura 11

Bibliografie

[1] D. Efremov, *Noua geometrie a triunghiului* (traducere de Mihai Miculița), Editura Gil, Zalău, 2010.

[2] I. Pătrașcu, *O altă demonstrație pentru punctul lui Brocard*, Gazeta Matematică seria B, nr. 11/2017, pg. 505–508.

[3] I. Pătrașcu, *Probleme de geometrie plană,* Editura Cardinal, Craiova, 1996.

Extinderi ale unei inegalități de tip Nesbitt

Marin CHIRCIU[1]

În [1] este propusă următoarea problemă:

IX.264. Arătați că dacă $a, b, c > 0$ și $abc = 1$, atunci:

$$\frac{a}{c^2(ca+b^2)} + \frac{b}{a^2(ab+c^2)} + \frac{c}{b^2(bc+a^2)} \geq \frac{3}{2}.$$

D.M. Bătinețu-Giurgiu, București

Prezentăm următoarele extinderi ale inegalității de mai sus:

Extinderea 1. *Arătați că dacă* $a, b, c, n > 0$ *și* $abc = 1$*, atunci:*

$$\frac{a}{c^2(ca+nb^2)} + \frac{b}{a^2(ab+nc^2)} + \frac{c}{b^2(bc+na^2)} \geq \frac{3}{n+1}.$$

Extinderea 2. *Arătați că dacă* $a, b, c, m > 0$ *și* $abc = 1$*, atunci:*

$$\frac{a}{c^2(mca+b^2)} + \frac{b}{a^2(mab+c^2)} + \frac{c}{b^2(mbc+a^2)} \geq \frac{3}{m+1}.$$

Extinderea 3. *Arătați că dacă* $a, b, c, m, n > 0$ *și* $abc = 1$*, atunci:*

$$\frac{a}{c^2(mca+nb^2)} + \frac{b}{a^2(mab+nc^2)} + \frac{c}{b^2(mbc+na^2)} \geq \frac{3}{m+n}.$$

Demonstrăm în continuare ultima extindere, celelalte două fiind cazuri particulare ale acesteia.

Notăm $\mathcal{M}_s$ și $\mathcal{M}_d$ membrul stâng și respectiv membrul drept al inegalității. Există $x, y, z > 0$ astfel încât

$$a = \frac{x}{y},\ b = \frac{y}{z},\ c = \frac{z}{x}$$

(de exemplu, $x = abz$, $y = bz$, $z > 0$ arbitrar). Obținem:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_s &= \frac{\frac{x}{y}}{\frac{z^2}{x^2}\left(m\cdot\frac{z}{y}+n\cdot\frac{y^2}{z^2}\right)} + \frac{\frac{y}{z}}{\frac{x^2}{y^2}\left(m\cdot\frac{x}{z}+n\cdot\frac{z^2}{x^2}\right)} + \frac{\frac{z}{x}}{\frac{y^2}{z^2}\left(m\cdot\frac{y}{x}+n\cdot\frac{x^2}{y^2}\right)}\\ &= \frac{x^3}{mz^3+ny^3} + \frac{y^3}{mx^3+nz^3} + \frac{z^3}{my^3+nx^3} \overset{(1)}{\geq} \frac{3}{m+n} = \mathcal{M}_d,\end{aligned}$$

[1]Profesor, Colegiul Național ,,Zinca Golescu", Pitești, marin.chirciu@yahoo.com

unde (1) este adevărată, deoarece notând

$$\alpha = x^3,\ \beta = y^3,\ \gamma = z^3$$

avem

$$\frac{\alpha}{m\gamma + n\beta} + \frac{\beta}{m\alpha + n\gamma} + \frac{\gamma}{m\beta + n\alpha} = \frac{\alpha^2}{m\alpha\gamma + n\alpha\beta} + \frac{\beta^2}{m\alpha\beta + n\beta\gamma} + \frac{\gamma^2}{m\beta\gamma + n\alpha\gamma}$$
$$\overset{(2)}{\geq} \frac{(\alpha+\beta+\gamma)^2}{(m+n)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)} \overset{(3)}{\geq} \frac{3}{m+n},$$

(2) este evidentă din $\dfrac{\alpha^2}{u} + \dfrac{\beta^2}{v} + \dfrac{\gamma^2}{t} \geq \dfrac{(\alpha+\beta+\gamma)^2}{u+v+t}$, pentru orice $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ și $u, v, t > 0$, cu egalitate dacă și numai dacă $\dfrac{\alpha}{u} = \dfrac{\beta}{v} = \dfrac{\gamma}{t}$, iar (3) este echivalentă cu $(\alpha+\beta+\gamma)^2 \geq 3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$, adică cu $(\alpha-\beta)^2 + (\beta-\gamma)^2 + (\gamma-\alpha)^2 \geq 0$, adevărată, cu egalitate numai pentru $\alpha = \beta = \gamma$.

Deducem că are loc inegalitatea din enunț, cu egalitate dacă și numai dacă $a = b = c = 1$.

Notă. Pentru $m = n = 1$ se obține problema menționată.

Bibliografie

[1] D.M. Bătinețu, *Revista de Matematică din Timișoara*, Problema IX.264, nr. 2/2008.

[2] Ș. Alexe, M. Chirciu, *Algebră clasa a IX-a*, Editura Paralela 45, 2005.

[3] M. Chirciu, *Matematică, clasa a IX-a*, Editura Tiparg, 2008.

Rezolvarea unor ecuații și sisteme de ecuații folosind monotonia, injectivitatea sau convexitatea funcțiilor

Mihai Florea DUMITRESCU[1]

Enunțăm câteva proprietăți ale funcțiilor pe care le vom utiliza în rezolvarea unor ecuații și sisteme de ecuații.

Proprietatea 1. *Fie $f, g : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ funcții strict monotone. Dacă f și g sunt strict crescătoare (strict descrescătoare), atunci $f + g$ este strict crescătoare (strict descrescătoare).*

Proprietatea 2. *Fie $f, g : D \to (0, +\infty)$, $D \subseteq \mathbb{R}$. Dacă f și g sunt strict crescătoare (strict descrescătoare), atunci $f \cdot g$ este strict crescătoare (strict descrescătoare).*

Proprietatea 3. *Fie $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcții monotone.*

a) Dacă f și g au aceeași monotonie, atunci $g \circ f$ este crescătoare.

b) Dacă f și g au monotonii diferite, atunci $g \circ f$ este descrescătoare.

Proprietatea 4. *Fie $f, g : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$. Dacă una din funcții este strict crescătoare (strict descrescătoare), iar cealaltă este descrescătoare (crescătoare), atunci ecuația $f(x) = g(x)$ are cel mult o soluție pe D.*

Proprietatea 5. *Dacă $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ este strict monotonă, atunci f este funcție injectivă.*

Proprietatea 6. *Dacă $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ este injectivă și pentru $x, y \in D$ avem $f(x) = f(y)$, atunci $x = y$.*

Proprietatea 7. *a) Suma a două funcții convexe este o funcție convexă.*

b) Suma a două funcții concave este o funcție concavă.

Proprietatea 8. *Fie $f, g : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$. Dacă f este o funcție convexă și g este o funcție concavă și cel puțin una dintre ele este strictă, atunci ecuația $f(x) = g(x)$ are cel mult două soluții pe D.*

[1]Profesor, Liceul „Ștefan Diaconescu”, Potcoava, florin14mihai@yahoo.com

Proprietatea 9. *a) Dacă $f : I \to \mathbb{R}$ este derivabilă pe I, $f' \geq 0$ pe I și nu există niciun interval $(a, b) \subseteq I$ cu $a < b$ pe care f' să fie nulă, atunci f este strict crescătoare.*

b) Dacă $f : I \to \mathbb{R}$ este derivabilă pe I, $f' \leq 0$ pe I și nu există niciun interval $(a, b) \subseteq I$ cu $a < b$ pe care f' să fie nulă, atunci f este strict descrescătoare.

Ne vom referi în continuare la aceste proprietăți utilizând prescurtările P_1, P_2, $\ldots$, respectiv P_9.

Aplicații

Aplicația 1. *Rezolvați ecuația* $4x + 1 = 3^{-x} - 3\log_3(x + 1)$.

Soluție. Condiția de existență: $x > -1$. Utilizând P_3, membrul stâng este o funcție strict crescătoare, iar membrul drept o funcție strict descrescătoare. Conform P_4 rezultă că ecuația are cel mult o soluție. Găsim soluția $x = 0$.

Aplicația 2. *Rezolvați ecuația* $x^3 + 3x^2 - 6x - 5 = \sqrt[3]{10x + 7}$.

Soluție. Ecuația dată este echivalentă cu

$$(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) + (x + 1) = 10x + 7 + \sqrt[3]{10x + 7}.$$

Considerăm funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + \sqrt[3]{x}$. Conform P_1 funcția f este strict crescătoare și aplicând P_5 rezultă că f este injectivă. Ecuația se poate scrie ca $f((x + 1)^3) = f(10x + 7)$. Din P_6 rezultă că $(x + 1)^3 = 10x + 7$, adică $x^3 + 3x^2 - 7x - 6 = 0$, având soluțiile $x_1 = 2$, $x_2 = \dfrac{-5 + \sqrt{13}}{2}$, $x_3 = \dfrac{-5 - \sqrt{13}}{2}$.

Aplicația 3. *Rezolvați în $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sistemul* $\begin{cases} \sqrt[3]{3x - 1} + 2\sqrt{\dfrac{8}{3}x + 1} = 2^y \\ \sqrt[3]{3y - 1} + 2\sqrt{\dfrac{8}{3}y + 1} = 2^x \end{cases}$.

Soluție. Condiții de existență: $x, y \geq -\dfrac{3}{8}$. Scădem cele două ecuații:

$$\sqrt[3]{3x - 1} + 2\sqrt{\frac{8}{3}x + 1} + 2^x = \sqrt[3]{3y - 1} + 2\sqrt{\frac{8}{3}y + 1} + 2^y. \tag{1}$$

Conform P_1 funcția $f : \left[-\dfrac{3}{8}, +\infty\right) \to \mathbb{R}$, $f(t) = \sqrt[3]{3t - 1} + 2\sqrt{\dfrac{8}{3}t + 1} + 2^t$ este strict crescătoare și, ținând cont de P_5, f este injectivă. Din (1), conform P_6 rezultă că $x = y$. Înlocuim în una din ecuațiile sistemului: $\sqrt[3]{3x - 1} + 2\sqrt{\dfrac{8}{3}x + 1} = 2^x$.

Conform P_7 funcția $g : \left[-\frac{3}{8}, +\infty\right) \to \mathbb{R},\ g(x) = \sqrt[3]{3x-1} + 2\sqrt{\frac{8}{3}x+1}$ este o funcție concavă. Funcția $h : \left[-\frac{3}{8}, +\infty\right) \to \mathbb{R},\ h(x) = 2^x$ este o funcție strict convexă. Aplicăm P_8 și găsim soluțiile $x = 0$ și $x = 3$, deci soluția sistemului este $S = \{(0,0), (3,3)\}$.

Aplicația 4. *Rezolvați în* $\mathbb{R}$ *ecuația* $2^{x^2-x} = 2\log_2 x + x$.

Soluție. Condiția de existență: $x > 0$. Ecuația se poate scrie sub forma

$$x^2 - x + 2^{x^2-x} = 2\log_2 x + 2^{2\log_2 x}. \tag{2}$$

Considerăm funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(t) = t + 2^t$. Conform P_1 funcția f este strict crescătoare și conform P_5 este injectivă. Ecuația (2) devine $f\left(x^2 - x\right) = f(2\log_2 x)$ și aplicând P_6 rezultă că $x^2 - x = 2\log_2 x$. Pe intervalul $(0, +\infty)$ membrul stâng al ultimei ecuații este funcție strict convexă, iar membrul drept este funcție concavă, prin urmare conform P_8 ecuația are cel mult două soluții. Găsim soluțiile $x = 1$ și $x = 2$.

Aplicația 5. *Rezolvați ecuația* $x^2 - x + 1 = 4^{x-1} - \log_2 x$.

Soluție. Condiția de existență: $x > 0$. Ecuația se poate scrie sub forma

$$x^2 + \log_2 x = \left(2^{x-1}\right)^2 + \log_2 2^{x-1},$$

adică $f(x) = f\left(2^{x-1}\right)$, unde $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 + \log_2 x$. Conform P_1 funcția f este strict crescătoare, deci conform P_5 ea este injectivă. Aplicând P_6 rezultă $x = 2^{x-1}$. Membrul drept al ultimei ecuații este o funcție strict convexă, iar membrul stâng o funcție concavă. Conform P_8 ecuația are cel mult două soluții. Găsim soluțiile $x = 1$ și $x = 2$.

Aplicația 6. *Rezolvați în* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *sistemul*

$$\begin{cases} x - \sqrt[3]{y} + 2^x = y - \sqrt[3]{x} + 2^y \\ 2^{2x} - (9-y)\cdot 2^x + 8 + 6x - 2y^2 = 0 \end{cases}.$$

Problema M 27, MATINF nr. 1/2018, *Sorin Ulmeanu*

Soluție. Prima ecuație a sistemului se mai poate scrie $x + \sqrt[3]{x} + 2^x = y + \sqrt[3]{y} + 2^y$, adică $f(x) = f(y)$, unde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(t) = t + \sqrt[3]{t} + 2^t$. Conform P_1 funcția f este strict crescătoare, deci conform P_5 f este injectivă. Rezultă că $x = y$.

Înlocuind în a doua ecuație obținem $2^{2x} - (9-x)\cdot 2^x + 8 + 6x - 2x^2 = 0$, care se poate scrie sub forma:

$$(2^x + 2x - 8)\cdot(2^x - x - 1) = 0.$$

Se obțin ecuațiile $2^x + 2x - 8 = 0$ și $2^x = x + 1$.

Pentru rezolvarea primeia considerăm funcția $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = 2^x + 2x - 8$. Conform P_1 funcția g este strict crescătoare, deci conform P_4 obținem că $x = 2$ este soluție unică.

Conform P_8 ecuația $2^x = x + 1$ are cel mult două soluții și astfel $x = 0$ și $x = 1$ sunt singurele sale soluții.

În concluzie, mulțimea soluțiilor sistemului dat este $S = \{(0,0), (1,1), (2,2)\}$.

Aplicația 7. *Să se rezolve în* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *sistemul*

$$\begin{cases} \dfrac{1 - \sqrt[3]{xy}}{\sqrt[3]{y}} = \log_2 x + \log_2 y \\ 2^{x+y} = 2^y \cdot \left(y^2 - x^2 - x - 5y + 6\right) + 4 \end{cases}.$$

Soluție. Condiții de existență: $x > 0,\ y > 0$. Prima ecuație se poate rescrie ca:

$$\sqrt[3]{x} + \log_2 x = \sqrt[3]{\frac{1}{y}} + \log_2 \frac{1}{y}.$$

Considerăm funcția $f : (0; +\infty) \to \mathbb{R},\ f(t) = \sqrt[3]{t} + \log_2 t$. Conform P_1 funcția f este strict crescătoare și din P_5 ea este injectivă. Conform P_6, din $f(x) = f\left(\dfrac{1}{y}\right)$ rezultă că $x = \dfrac{1}{y}$, deci $xy = 1$.

A doua ecuație din enunț se poate rescrie ca:

$$2^x + x^2 + x = 2^{2-y} + (2 - y)^2 + 2 - y.$$

Fie funcția $g : (0; +\infty) \to \mathbb{R},\ g(t) = 2^t + t^2 + t$. Conform P_1 funcția g este strict crescătoare și din P_5 ea este injectivă. Din $g(x) = g(2 - y)$ conform P_6 rezultă că $x = 2 - y$, deci $x + y = 2$.

Obținem sistemul $\begin{cases} xy = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$, cu soluția $(1,1)$.

Aplicația 8. *Să se rezolve ecuația* $\log_9(x - 1) + \log_4(6 - x) = 1$.

Soluție. Condiții de existență: $x - 1 > 0,\ 6 - x > 0$, deci $x \in (1, 6)$. Efectuând substituția

$$\log_9(x - 1) = t$$

rezultă că $t \in (-\infty, \log_9 5)$, iar ecuația dată devine:

$$9^t + 4^{1-t} = 5.$$

Înmulțim ecuația cu 4^t și obținem $36^t - 5 \cdot 4^t = -4$.

Considerăm funcția $f:(-\infty,\log_9 5)\to\mathbb{R}$, $f(t)=36^t-5\cdot 4^t$. Avem

$$f'(t)=36^t\ln 36-5\cdot 4^t\ln 4.$$

Din $f'(t)=0$ rezultă $t=\log_9\dfrac{5\ln 4}{\ln 36}$. Avem $f'(t)\le 0$ pentru $t\in\left(-\infty,\log_9\dfrac{5\ln 4}{\ln 36}\right]$ și $f'(t)\ge 0$ pentru $t\in\left[\log_9\dfrac{5\ln 4}{\ln 36},\log_9 5\right)$. Conform P_9 funcția f este strict descrescătoare pe intervalul $\left(-\infty,\ln\dfrac{5\ln 4}{\ln 36}\right]$ și strict crescătoare pe intervalul $\left[\ln\dfrac{5\ln 4}{\ln 36},\log_9 5\right)$. Prin urmare conform P_4 ecuația $f(t)=-4$ are cel mult o soluție pe fiecare din aceste două intervale. Găsim soluțiile $t=0$ și $t=\dfrac{1}{2}$, de unde $x=2$ și $x=4$.

Metode moderne de demonstrare a unor inegalități în triunghi

Leonard GIUGIUC[1], *Cezar Alexandru TRĂNCĂNĂU*[2] *și Alexandru PÎRVUCEANU*[3]

Vom reaminti câteva rezultate esențiale, rezultate descoperite independent de către *Leonard Giugiuc* si de către profesorul *Vo Quoc Ba Can* din Vietnam.

Teorema 1. *Fie s și t numere reale nenegative fixate. Considerăm numerele reale a, b și c astfel încât*

$$a+b+c=3s \ \text{ și } \ ab+bc+ca=3\left(s^2-t^2\right). \tag{1}$$

Atunci valoarea minimă a produsului abc este egală cu $(s+t)^2(s-2t)$. Mai mult, $abc=(s+t)^2(s-2t)$ dacă și numai dacă $(a,b,c)=(s+t,s+t,s-2t)$ și permutările lor.

Teorema 2. *Fie s și t numere reale nenegative fixate. Considerăm numerele reale a, b și c astfel încât au loc egalitățile (1). Atunci valoarea maximă a produsului abc este egală cu $(s-t)^2(s+2t)$. Mai mult, $abc=(s-t)^2(s+2t)$ dacă și numai dacă $(a,b,c)=(s-t,s-t,s+2t)$ și permutările lor.*

Teorema 3. *Fie s și t numere reale fixate, cu $0\le t\le s$. Considerăm numerele reale nenegative a, b și c astfel încât au loc egalitățile (1). Atunci valoarea minimă a produsului abc este egală cu*

$$\begin{cases} (s+t)^2(s-2t), & \text{dacă } 0\le t\le \dfrac{s}{2} \\ 0, & \text{dacă } \dfrac{s}{2}\le t\le s \end{cases}.$$

Mai mult, dacă $0\le t\le \dfrac{s}{2}$, atunci $abc=(s+t)^2(s-2t)$ dacă și numai dacă $(a,b,c)=(s+t,s+t,s-2t)$ și permutările lor.

Teorema 4. *Fie s și t numere reale fixate, cu $0\le t\le s$. Considerăm numerele reale nenegative a, b și c astfel încât au loc egalitățile (1). Atunci valoarea maximă a produsului abc este egală cu $(s-t)^2(s+2t)$. Mai mult, $abc=(s-t)^2(s+2t)$ dacă și numai dacă $(a,b,c)=(s-t,s-t,s+2t)$ și permutările lor.*

[1]Profesor, Colegiul Național ,,Traian", Drobeta Turnu Severin, leonardgiugiuc@yahoo.com
[2]Elev, Colegiul Național ,,Traian", Drobeta Turnu Severin
[3]Elev, Colegiul Național ,,Traian", Drobeta Turnu Severin

Aceste rezultate nu vor fi demonstrate aici. De remarcat că în cazul în care a, b și c reprezintă lungimile laturilor unui triunghi (eventual degenerat), atunci Teoremele 3 și 4 devin duale.

Aplicația 1 (AOPS)**.** *Fie a, b și c lungimile laturilor unui triunghi (eventual degenerat). Atunci are loc următoarea inegalitate:*

$$\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}+3\geq 6\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right). \qquad (2)$$

Demonstrație. Să remarcăm că dacă fixăm $a+b+c$ și $ab+bc+ca$, atunci membrul stâng este descrescător în funcție de variabila abc în timp ce membrul drept este crescător în funcție de abc. Deci vom aplica duala Teoremei 4 într-o formă mai elegantă. Aceasta ne spune următoarele:

Este suficient să verificăm că dacă $b=c=1$ și $a\in[1,2]$ atunci (2) este îndeplinită, și că dacă $a,b>0$ și $c=a+b$ atunci (2) este iarăși îndeplinită.

În primul caz, obținem inegalitatea $(2-a)(a-1)^2\geq 0$ care este evident adevărată pentru orice $a\in[1,2]$.

În cel de-al doilea caz obținem inegalitatea

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 3\left(\frac{a}{a+2b}+\frac{b}{2a+b}\right),$$

care se verifică ușor că este adevărată.

Să remarcăm cazurile de egalitate. Acestea sunt triunghiul echilateral (a,a,a) și triunghiurile isoscele degenerate $(a,a,2a)$. □

Aplicația 2 (*Ji Chen*, Crux Mathematicorum, 1994)**.** *Fie a, b și c lungimile laturilor unui triunghi (eventual degenerat), cu semiperimetrul p. Atunci are loc următoarea inegalitate:*

$$[(p-a)(p-b)+(p-b)(p-c)+(p-c)(p-a)]\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\geq\frac{9}{4}. \qquad (3)$$

Demonstrație. Fie $a+b+c=s$, $ab+bc+ca=q$ cu s și q fixate, iar $abc=x$ cu x variabil. Avem:

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{q^2-2sx}{x^2}.$$

Dar

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{q^2-2sx}{x^2}\right)=-2\cdot\frac{q^2-sx}{x^3}.$$

Cum $q^2\geq 3sx>sx$, deducem că membrul stâng este descrescător în variabila abc. Deci vom proceda analog ca la Aplicația 1.

Cazul 1: $b = c = 1$ și $a \in [1, 2]$. Înlocuind în (3) obținem $(2 - a)(a - 1)^2 \geq 0$ care este evident adevărată pentru orice $a \in [1, 2]$.

Cazul 2: $a, b > 0$ și $c = a + b$. Înlocuind în (3) obținem

$$ab\left[\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{(a+b)^2}\right] \geq \frac{9}{4},$$

inegalitate evident adevărată.

Cazurile de egalitate sunt identice cu cele menționate în Aplicația 1. □

Să remarcăm că ambele inegalități sunt extrem de fine, fiind comparabile cu *inegalități de tip Blundon*.

Bibliografie

[1] http://rmgo.upit.ro/

[2] https://artofproblemsolving.com/community/u21755h1706331p10984283

[3] https://cms.math.ca/crux/

CONCURSUL DE MATEMATICĂ ,,MARINESCU-GHEMECI OCTAVIAN”

Prezentarea Concursului Județean de Matematică ,,MARINESCU–GHEMECI OCTAVIAN”, Ediția a IV-a, Potcoava, 9 mai 2015

Costel ANGHEL [1]

În data de 9 mai 2015 a avut loc la Liceul ,,Ștefan Diaconescu” din Potcoava, Concursul Județean de Matematică ,,Marinescu-Ghemeci Octavian”, ediția a IV-a, care s-a adresat elevilor de gimnaziu și de liceu de la specializările științe ale naturii, tehnic și servicii. Președintele concursului a fost conf. univ. dr. Costel Bălcău de la Universitatea din Pitești.

La această ediție au participat 244 elevi de la școlile și liceele din județul Olt.

Subiectele au fost selectate de o comisie formată din conf. univ. dr. Costel Bălcău, prof. Costel Anghel, prof. Florea Badea și prof. Mihai Florea Dumitrescu.

Prezentăm în continuare subiectele date în concurs.

Clasa a V-a

1. Se dau numerele: $a = 3 \cdot 3^2 \cdot 3^3 \cdot \ldots \cdot 3^{50}$ și $b = 3^{2011} - 2 \cdot 3^{2010} - \ldots - 2 \cdot 3^{1276}$.

   (a) Scrieți a și b ca puteri cu baza 3.

   (b) Calculați $(3a - b)^{2015}$.

Florea Badea, Scornicești

2. Un număr natural de trei cifre, divizibil cu 77, are toate cifrele pare. Să se afle acest număr.

Florea Badea, Scornicești

[1] Profesor, Colegiul Național ,,Ion Minulescu”, Slatina, anghelcostel2012@yahoo.com

3. Determinați cifrele nenule x și y știind că $\overline{x,x}^y = \overline{x,yx}$.

Florea Badea, Scornicești

4. (a) Câte submulțimi cu două elemente are o mulțime cu 10 elemente? Justificați.
   (b) Câte numere de 8 cifre cu cifrele în ordine descrescătoare se pot forma în sistemul zecimal? Justificați.

Sorin Peligrad și *Adrian Țurcanu*, Pitești

Clasa a VI-a

1. La un concurs de matematică elevii au rezolvat o problemă de algebră și una de geometrie. Se știe că 25 de elevi au rezolvat corect ambele probleme, 72% din elevi au rezolvat corect problema de algebră, iar 48% au rezolvat-o corect pe cea de geometrie.
   (a) Câți elevi participă la concurs?
   (b) Câți elevi au rezolvat corect problema de algebră?
   (c) Câți elevi au rezolvat corect problema de geometrie?

Florea Badea, Scornicești

2. Determinați:
   (a) Câte numere naturale de 3 cifre se divid cu 2.
   (b) Câte numere naturale de 3 cifre au ca divizor prim doar pe 2.
   (c) Câte numere naturale de 3 cifre se divid cu 2 și cu 3.
   (d) Câte numere naturale de 3 cifre au ca divizori primi doar pe 2 și pe 3.

Costel Bălcău, Pitești, Supliment G.M.-B nr. 10/2014

3. Fie x,y,z numere raționale pozitive astfel încât
$$\frac{2x}{3y+4z} = \frac{3y}{2x+4z} = \frac{4z}{2x+3y}.$$
Calculați $(x+3y+2z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{3y}+\frac{1}{2z}\right)$.

***

4. În triunghiul ABC fie punctul $D \in (BC)$ astfel încât $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle CAD$ și $AB + BD = AC + CD$. Arătați că triunghiul ABC este isoscel.

Sorin Peligrad și *Adrian Țurcanu*, Pitești

Clasa a VII-a

1. (a) Numerele $a, b, c > 0$ sunt direct proporționale cu $3, a, b$ iar $3b + a^2 = 1800$. Determinați numerele a,b,c și calculați $A = \left(c - 2a^2 - 4b + 1\right)^{2015}$.

   (b) Arătați că pentru n număr natural fracția $F = \dfrac{49^n + 16 \cdot 7^n + 55}{2 \cdot 7^n + 22}$ este număr natural.

Florea Badea, Scornicești

2. Să se determine numărul natural $\overline{abc}$, $a \neq 0$, știind că $\overline{abc}^2 = \overline{390abc}$.

***

3. Se consideră numărul $a_n = 18\underbrace{7 \cdots 77}_{n}889$, unde n este număr natural și fie c_n câtul împărțirii lui a_n la 13.

   (a) Arătați că $a_n \vdots 13$, oricare ar fi n număr natural.

   (b) Determinați n natural astfel încât $S(a_n) = 2S(c_n)$, unde $S(m)$ reprezintă suma cifrelor numărului m.

Marius Burtea, Alexandria, Supliment G.M.-B nr. 3/2015

4. Fie trapezul $ABCD$ de baze AB și CD, $AB > CD$ și E mijlocul segmentului $[AD]$. Să se arate că dacă $[BE$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle ABC$, atunci $BC = AB + CD$.

Costel Anghel, Negreni

Clasa a VIII-a

SUBIECTUL I (Pe foaia de examen se trec doar rezultatele)

1. Rezultatul calculului $\left(1 + 2^2 + 2^3 + 2^4\right) : \left(1 + 2^2\right)$ este egal cu ...

2. Dacă $\dfrac{x}{3} = \dfrac{7}{5y}$, atunci valoarea expresiei $5 \cdot (xy - 4)$ este egală cu ...

3. Se dă intervalul $I = \left[2\sqrt{2}, 3\sqrt{3}\right]$. Intervalul conține un număr de ... numere naturale.

4. Un trapez are linia mijlocie egală cu 9 cm și una din baze egală cu 8 cm. Lungimea celeilalte baze este egală cu ... cm.

5. Fie $VABCD$ o piramidă patrulateră regulată. Triunghiul VBD este un triunghi echilateral cu latura de lungime egală cu $6\sqrt{2}$ cm. Atunci volumul piramidei va fi egal cu $\ldots \mathrm{cm}^3$.

6. Profiturile unei societăți comerciale pe cinci ani sunt trecute în tabelul de mai jos:

Anul	2009	2010	2011	2012	2013
Profitul (milioane lei)	10	20	40	30	40

Profitul mediu obținut de societate pe perioada celor cinci ani este egal cu ... mil. lei.

SUBIECTUL al II-lea

1. Desenați, pe foaia de examen, o prismă triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$.

2. Să se determine numerele naturale $\overline{ab}$, știind că $\overline{ab} + \overline{ba} + 6a + 6b$ este pătrat perfect.

3. Pentru un grup de copii se cumpără caiete de matematică și de 4 ori mai multe caiete de dictando. După ce se dau fiecărui copil 2 caiete de matematică și 3 de dictando, mai rămân 2 caiete de matematică și 43 caiete de dictando. Câți copii sunt în grup și câte caiete de fiecare fel s-au cumpărat?

4. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \left(2 - \sqrt{3}\right) x + 7$.

   (a) Să se calculeze $f\left(6 + 3\sqrt{3}\right)$.

   (b) Să se determine numerele raționale x și y știind că $f(x) = y + 3\sqrt{3}$.

5. Fie x și y numere reale distincte și nenule, care verifică relația $x + \dfrac{2}{x} = y + \dfrac{2}{y}$. Să se arate că $8xy$ este pătratul unui număr natural.

SUBIECTUL al III-lea

1. Un parc are forma unui trapez dreptunghic $ABCD$ cu $m(\hat{A}) = m(\hat{D}) = 90°$. AB, CD sunt baza mare respectiv baza mică, $AB = 60$ m, $BC = 50$ m și $CD = 30$ m. Fie $M \in (AD)$, $AM = x$ m și ΔCMB dreptunghic în C. Pe terenul care formează ΔCMB se plantează flori, iar pe restul terenului se seamănă gazon.

   (a) Determinați pe x.

   (b) Dacă $x = 17,5$ m, aflați raportul între aria terenului semănat cu gazon și aria terenului plantat cu flori.

(c) Terenul plantat cu flori se împrejmuiește cu un gărduleț. Aflați lungimea gărdulețului.

2. Un bloc turn are forma unui paralelipiped dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$, cu dimensiunile bazei $AB = 16$ m, $BC = 12$ m și înălțimea $AA' = 30$ m.

   (a) Se știe că parterul și etajele au aceeași înălțime, și anume $2,5$ m. Câte etaje are blocul?
   (b) Calculați distanța de la A' la BD.
   (c) Trebuie izolat acoperișul blocului și se știe că un muncitor izolează 1 m^2 în 2 ore. Aflați câți muncitori trebuie angajați pentru a termina lucrarea în 5 zile, dacă toți lucrează 8 ore pe zi și au același ritm de lucru.

SUBIECTUL al IV-lea

1. Dacă $x, y, z > 0$ și $x^2 + y^2 + z^2 = \sqrt{xy + yz + zx} - \dfrac{1}{4}$, atunci determinați x, y și z.

2. Tetraedrul $ABCD$ se secționează cu un plan variabil paralel cu muchiile AB și CD. Pentru ce poziție a planului, poligonul de secțiune are arie maximă?

Test propus de *Florea Badea*, Scornicești și *Costel Anghel*, Negreni

Clasa a IX-a

1. Se dă expresia $E(x, y) = 2x^2 + 2y^2 + 2xy - 10x - 14y + 2041$, $x, y \in \mathbb{R}$.

   (a) Determinați minimul expresiei $E(x, y)$.
   (b) Aflați valorile lui x și y pentru care expresia $E(x, y)$ are valoarea minimă.

Florea Badea, Scornicești

2. Fie $A = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \ldots + \dfrac{1}{2015^2}$. Calculați $[A]$ (partea întreagă a lui A).

Iulia Marinescu-Ghemeci, Potcoava

3. Determinați funcția $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$, știind că $f(1) = a$ ($a \in \mathbb{N}^*$) și

$$2f(1) + 3f(2) + \ldots + (n+1) f(n) = \frac{(n+1)(n+2) f(n)}{3}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Mihai Florea Dumitrescu, Potcoava

4. Fie M un punct interior triunghiului ABC și G_A, G_B, G_C centrele de greutate ale triunghiurilor MBC, MAC, respectiv MAB. Arătați că $\overrightarrow{AG_A} + \overrightarrow{BG_B} + \overrightarrow{CG_C} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow M$ este centrul de greutate al triunghiului ABC.

***

Clasa a X-a

1. Calculați $(1-2z_1^2)(1-2z_2^2)(1-2z_3^2)$, unde z_1, z_2, z_3 sunt rădăcinile cubice ale unității.

***

2. Rezolvați ecuația $\sqrt{2^{\log_3 x}-1}+\sqrt{3-x^{\log_3 2}}=2$.

Camelia Macsut, Craiova, Supliment G.M.-B nr. 3/2015

3. (a) Să se calculeze aria triunghiului determinat de dreptele de ecuații $x=4,\ y=x+1$ și $3x+2y+10=0$.

   (b) Fie punctele $A(1;2),\ B(2;9),\ C(3;-1)$ și $D(4;a)$. Să se determine valorile lui $a\in\mathbb{R}$ pentru care $[AD]\bigcap[BC]\neq\emptyset$.

***

4. (a) Arătați că există $a,b\in\mathbb{Z}$ astfel încât pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ are loc egalitatea $\dfrac{(2n)!}{n!(n+1)!}=aC_{2n-1}^n+bC_{2n+1}^n$.

   (b) Deduceți că pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ numărul $(2n)!$ se divide cu $n!(n+1)!$.

***

Clasa a XI-a

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}3&2&1\\6&4&2\\9&6&3\end{pmatrix}$ și $B=I_3+A$.

   (a) Verificați că $A^2=10A$.

   (b) Arătați că B este inversabilă și determinați B^{-1}.

***

2. Fie matricele $A,B\in M_2(\mathbb{C})$ cu $AB+BA=O_2$ și $\det(A+B)=0$. Demonstrați că $\det(A^2+B^2)=0$.

***

3. Calculați:

   (a) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$.

   (b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos 4x}{x^2}$.

***

4. Considerăm funcțiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{C_n^0}{1} \cdot x + \dfrac{C_n^1}{2} \cdot x^2 + \dfrac{C_n^2}{3} \cdot x^3 + \ldots + \dfrac{C_n^n}{n+1} \cdot x^{n+1},\ g(x) = \dfrac{(1+x)^{n+1}}{n+1}$, unde n este un număr natural nenul.
   (a) Arătați că $f'(x) = g'(x), \forall x \in \mathbb{R}$.
   (b) Arătați că $f(x) = g(x) - \dfrac{1}{n+1}, \forall x \in \mathbb{R}$.
   (c) Demonstrați că $\dfrac{C_n^0}{1} + \dfrac{C_n^1}{2} + \ldots + \dfrac{C_n^n}{n+1} = \dfrac{2^{n+1} - 1}{n+1}$.

***

Clasa a XII-a

SUBIECTUL I

1. Calculați $\left[\sqrt{2}\right] + \left[\sqrt{3}\right] + \ldots + \left[\sqrt{8}\right]$, unde $[x]$ este partea întreagă a numărului real x.
2. Determinați valoarea maximă a funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = -x^2 + 5x$.
3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $8^{2x+1} = \sqrt[3]{4}$.
4. Calculați probabilitatea ca alegând la întâmplare un element din mulțimea $A = \{1, 2, 3, \ldots, 60\}$, acesta să fie divizibil cu 6 și să nu fie divizibil cu 12.
5. În reperul cartezian xOy se consideră dreapta h de ecuație $y = 2x - 3$ și punctul $A(-1, 1)$. Determinați ecuația dreptei care trece prin punctul A și este perpendiculară pe dreapta h.
6. Determinați raza cercului circumscris unui triunghi echilateral care are aria egală cu $4\sqrt{3}$.

SUBIECTUL al II-lea

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2015 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Calculați $\det(A^{2015})$.
   (b) Arătați că matricea $A^{2015} - 2A^{2014} + A^{2013}$ nu este inversabilă.
   (c) Determinați toate matricele $X \in M_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea că are loc egalitatea $X^2 = A$.

2. Se consideră polinomul $f = 2X^4 + X^3 + 5X^2 + X + a$, unde a este un număr real și fie $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$ rădăcinile sale.
   (a) Arătați că polinomul f are și rădăcini complexe nereale.
   (b) Calculați câtul și restul împărțirii polinomului f la $X + 1$.
   (c) Calculați $(x_1 - 1)(x_2 - 1)(x_3 - 1)(x_4 - 1)$.

SUBIECTUL al III-lea

1. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.
   (a) Calculați $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x) - \sqrt{2}}{x - 1}$.
   (b) Determinați asimptotele funcției f.
   (c) Determinați valorile reale ale lui m pentru care ecuația $f(x) = m$ nu are nicio soluție.
2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \cos 2x$.
   (a) Calculați $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x f(x) dx$.
   (b) Aflați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R},\ g(x) = f(x)$.
   (c) Calculați $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \dfrac{f''(x) \cdot f(x) - (f'(x))^2}{f^2(x)} dx$.

Test propus de *Florea Badea*, Scornicești și *Costel Anghel*, Negreni

Premianții concursului au fost:

Clasa a V-a: Premiul I: *Mărgheanu Cristina Andreea* (Șc. Gimn. ,,Eugen Ionescu", Slatina), *Țolu Diana* (Șc. Gimn. ,,Eugen Ionescu", Slatina); Premiul al II-lea: *Gabor Ioana Andreea* (Șc. Gimn. ,,Eugen Ionescu", Slatina); Premiul al III-lea: *Polck Sabina* (Șc. Gimn. ,,Eugen Ionescu", Slatina).

Clasa a VI-a: Premiul I: *Mladin Raisa* (L.P.S. Slatina); Premiul al II-lea: *Păunescu Bianca* (Șc. Gimn. ,,Eugen Ionescu", Slatina); Premiul al III-lea : *Amza Cristina Alexandra* (L.P.S. Slatina), *Vasile Radu* (Șc. Gimn. ,,Eugen Ionescu", Slatina).

Clasa a VII-a: Premiul I: *Alexandrescu Marian* (Șc. Gimn. Nr. 3, Slatina); Premiul al II-lea: *Ene Mihaela* (Șc. Gimn. ,,Eugen Ionescu", Slatina), *Ivana Alin Mihail* (Liceul Ștefan Diaconescu", Potcoava), *Popescu Adelina* (Șc. Gimn. ,,Eugen Ionescu", Slatina); Premiul al III-lea: *Monete Maria* (Șc. Gimn. ,,Eugen Ionescu", Slatina).

Clasa a VIII-a: Premiul I: *Drăghia Denisa* (Șc. Gimn. ,,Dumitru Buzdun", Corabia); Premiul al II-lea: *Ciorceanu Andrei Răzvan* (Șc. Gimn. ,,Eugen

Ionescu", Slatina); Premiul al III-lea: *Dobriță Mădălin* (Șc. Gimn. ,,Eugen Ionescu", Slatina).

Clasa a IX-a: Premiul I: *Velcea Ana Maria* (Liceul ,,Ștefan Diaconescu", Potcoava); Premiul al II-lea: *Voiculeț Cristina Alexandra* (Liceul ,,Ștefan Diaconescu", Potcoava); Premiul al III-lea: *Dumitrescu Valentin* (C.N. ,,Radu Greceanu", Slatina).

Clasa a X-a: Premiul I: *Cocorăscu Ana Maria* (C.N. ,,Ion Minulescu", Slatina); Premiul al II-lea: *Spiridon Gabriela* (C.N. ,,Ion Minulescu", Slatina); Premiul al III-lea: *Răducanu Alexandra* (C.N. ,,Ion Minulescu", Slatina).

Clasa XI-a: Premiul I: *Bazgă Ileana Mihaela* (Liceul ,,Ștefan Diaconescu", Potcoava); Premiul al II-lea: *Cochinescu Iuliana Irina* (Liceul ,,Ștefan Diaconescu", Potcoava); Premiul al III-lea: *Ștefan Andrei Robert* (Liceul ,,Ștefan Diaconescu", Potcoava).

Clasa a XII-a: Premiul I: *Meleandră Iuliana Alexandra* (C.N. ,,Radu Greceanu", Slatina); Premiul al II-lea: *Costea Silvia* (Liceul ,,Ștefan Diaconescu", Potcoava); Premiul al III-lea: *Dogaru Nicoleta* (Liceul ,,Ștefan Diaconescu", Potcoava).

Premiile acordate câștigătorilor au fost sponsorizate de firma SC VISTORIA LUX SRL, reprezentată de director general ing. Victor Badea.

Doamna profesoară Ileana Marinescu-Ghemeci a acordat *Premiul Special Marinescu-Ghemeci Octavian* elevului *Alexandrescu Marian* (Șc. Gimn. Nr. 3, Slatina).

Prezentarea Concursului Interjudețean de Matematică ,,MARINESCU–GHEMECI OCTAVIAN", Ediția a V-a, Potcoava, 14 mai 2016

Florea BADEA [1]

I.S.J. Olt și Liceul ,,Ștefan Diaconescu" din Potcoava au organizat în data de 14 mai 2016 Concursul de Matematică ,,Marinescu-Ghemeci Octavian", ediția a V-a, care s-a adresat elevilor din clasele V-VIII și elevilor de liceu având examenul de Bacalaureat de tip M2. Președintele concursului a fost domnul conf. univ. dr. Costel Bălcău de la Universitatea din Pitești.

A fost prima ediție în care concursul a devenit interjudețean, fiind prezenți un număr de 251 de elevi din județele Argeș, Olt și Vâlcea.

Premiile au fost sponsorizate din nou de firma VICTORIA LUX SRL, reprezentată de directorul general ing. Victor Badea, iar doamna profesoară Ileana Marinescu-Ghemeci a acordat două premii speciale elevilor cu cel mai mare punctaj din concurs.

Subiectele au fost selectate de o comisie formată din conf. univ. dr. Costel Bălcău, prof. Anghel Costel, prof. Florea Badea și prof. Mihai Florea Dumitrescu.

Iată subiectele propuse în concurs:

Clasa a V-a

1. Se consideră numărul natural $a = 4^{2002} \cdot 5^{4007} + 1425$. Determinați primele cinci cifre și ultimele cinci cifre ale lui a.

Florea Badea, Scornicești

2. Se consideră fracția $F = \dfrac{473}{1265}$. Determinați câte numere naturale sunt în mulțimea $A = \{F, 2F, 3F, \ldots, 2016F\}$.

Florea Badea, Scornicești

[1] Profesor, Școala Gimnazială ,,Nicolae Coculescu", Scornicești

3. Există cifre nenule a și b pentru care are loc egalitatea $\overline{ab}^{51} = \overline{ba}^{68}$? Justificați răspunsul.

Dragoș Petrică, Pitești

4. Fie $A = \{a, b, c, d\} \subset \mathbb{N},\ a < b < c < d$. Notăm cu B mulțimea tuturor sumelor de câte două elemente din A, nu neapărat distincte (de exemplu $a + a \in B$). Să se arate că dacă avem card $B = 7$, atunci există $r \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $b = a + r,\ c = a + 2r,\ d = a + 3r$.

Costel Anghel, Bircii

Clasa a VI-a

1. Să se determine numerele prime $x,\ y,\ z$ știind că $xy + yz + zx + 2016 = 6xyz$.

Florea Badea, Scornicești

2. Fie numărul natural $n = 1234 \cdots 828384$.

   (a) Să se arate că n nu este pătrat perfect.

   (b) Determinați numărul de numere naturale k pentru care restul împărțirii lui n la 10^k este pătrat perfect.

Stelian Corneliu Andronescu și *Costel Bălcău*, Pitești

3. Fie ABC un triunghi. Pe latura (AC) se consideră punctele P și Q astfel încât $AP = CQ$, iar P și Q *se* află pe mediatoarele lui (AB) respectiv (BC). Știind că $m\left(\widehat{PBQ}\right) = 20°$, se cere:

   (a) Arătați că ΔPBQ este isoscel.

   (b) Determinați măsurile unghiurilor ΔABC.

Florea Badea, Scornicești și *Costel Anghel*, Bircii

4. (a) Determinați un număr natural n astfel încât $\left(n \cdot 10^4 - 1\right) \vdots 2017$.

   (b) Găsiți un număr natural care începe cu 2016, se termină cu 2016 și este divizibil cu 2017.

Costel Anghel, Bircii

Clasa a VII-a

1. (a) Să se calculeze $n^2-(n+1)^2-(n+2)^2+(n+3)^2, n\in\mathbb{N}$.
   (b) Se consideră mulțimea $M=\{3,4,5,6,\ldots,21\}$. Să se găsească două submulțimi disjuncte A, B ale lui M cu $A\cup B=M$, una cu 9 elemente, cealaltă cu 10 elemente și suma pătratelor elementelor lui A să fie egală cu suma pătratelor elementelor lui B.

Costel Anghel, Bircii

2. Se consideră șirul $1,2,4,5,7,\ldots$ format din numerele naturale nedivizibile cu 3. Suma a $2n$ termeni consecutivi ai șirului este egală cu 300, $n\in\mathbb{N}^*$. Să se determine toate valorile posibile ale lui n.

***

3. Se consideră paralelogramul $ABCD$ având $m(\widehat{BAD})=45^\circ$ și $BD\perp AB$. Dacă $M\in(BC)$ astfel încât $m(\widehat{BAM})=15^\circ$, demonstrați că $AM=BC$.

Adriana Daniela Gurgui, Constanța, Supliment G.M.-B nr. 3/2016

4. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic. Înălțimile din B și C se intersectează în H, iar bisectoarele unghiurilor $\widehat{ABH}$ și $\widehat{ACH}$ se intersectează în K. Bisectoarea $(BK$ intersectează pe CH în M și pe AC în P, iar bisectoarea $(CK$ intersectează pe BH în N și pe AB în Q.
   (a) Arătați că patrulaterul $MNPQ$ este romb.
   (b) Pentru ce triunghiuri ABC patrulaterul $MNPQ$ este pătrat?

Costel Anghel, Bircii

Clasa a VIII-a

SUBIECTUL I (Pe foaia de examen se trec doar rezultatele)

1. Rezultatul calculului $6^2-12\cdot4+4^2$ este egal cu ...
2. Dacă 10% din 10% din x este egal cu 20,16 atunci $x=\ldots$
3. Suma numerelor întregi din intervalul $I=\left(-\sqrt{7},\sqrt{17}\right)$ este egală cu ...
4. Un dreptunghi are lungimea egală cu $16\sqrt{3}$ cm și unghiul ascuțit dintre diagonale cu măsura egală cu 60°. Lungimea lățimii dreptunghiului este egală cu ... cm.
5. Diagonala unui cub este egală cu 5 cm. Volumul cubului este egal cu ... cm^3.

6. Elevii unei clase au obținut la un test notele trecute în următorul tabel:

Nota	4	5	6	7	8	9	10
Nr. elevi	3	2	3	7	6	2	2

Media clasei este egală cu ...

SUBIECTUL al II-lea

1. Desenați pe foaia de examen o prismă patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$.
2. Dacă $x \in [1,3]$ calculați $E = \sqrt{(1-x)^2} - |x-3| + |2x-6|$.
3. Dacă elevii unei clase se așează câte doi în bancă, rămâne unul în picioare, iar dacă se așează câte trei, rămân patru bănci libere. Câte bănci și câți elevi sunt în clasă?
4. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \left(1-\sqrt{2}\right)x + a$.
   (a) Determinați $a \in \mathbb{R}$ astfel încât punctul $M\left(\sqrt{2}+1; 2\right) \in G_f$.
   (b) Pentru $a = 3$, rezolvați inecuația $f(x) \geq 3\sqrt{2}$.
5. Arătați că numărul $n = \sqrt{\dfrac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}} + \sqrt{\dfrac{3+2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}}$ este număr natural.

SUBIECTUL al III-lea

1. Un teren agricol are forma unui trapez dreptunghic$ABCD$, unde AB este baza mare și $m(\widehat{A}) = 90°$. Acesta este împărțit în trei parcele dintre care $AMNP$ este pătrat, $M \in (AB), N \in (BC), P \in (AD), MB = MN$. Se știe că $AB = 80$ m și $\mathcal{A}_{ABCD} = 3000$ m^2.
   (a) Arătați că lungimea segmentului $[PD]$ este egală cu 20 m.
   (b) Cât costă gardul care împrejmuiește parcela $AMNP$ dacă se folosesc panouri de câte doi metri care au prețul de 90 lei bucata, iar stâlpii care se pun la îmbinarea panourilor costă fiecare câte 20 de lei?
   (c) Parcela BMN este cultivată cu roșii. Producția medie a fost de 24 kg/m^2. Roșiile se vând cu prețul de $1,5$ lei/kg. Care este suma totală încasată pe roșii?
2. Un beci are forma unui paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile $L = 3$ m, $l = 2$ m, $h = 1,5$ m.
   (a) Câte plăci de faianță de formă dreptunghiulară cu dimensiunile de 20 cm și 30 cm sunt necesare pentru a acoperi podeaua și pereții laterali?

(b) Calculați volumul beciului.

(c) Se împarte beciul în patru zone *a, b, c, d* de volume direct proporționale cu numerele 2, 5, 6 și respectiv 7. Se pot depozita în zona b 24 de saci cu grâu, știind că fiecare sac are 80 de decimetri cubi?

Florea Badea, Scornicești și *Costel Anghel*, Bircii

SUBIECTUL al IV-lea

1. Fie *VABC* un tetraedru echifacial (muchiile opuse sunt congruente două câte două). Fie $(AM$ bisectoarea unghiului $\widehat{VAB}$, $M \in (VB)$, $(BN$ bisectoarea unghiului $\widehat{VBC}$, $N \in (VC)$ și $(CP$ bisectoarea unghiului $\widehat{VCA}$, $P \in (VA)$. Să se arate că $(MNP) \parallel (ABC) \Leftrightarrow VABC$ este tetraedru regulat.

Costel Anghel, Bircii

2. Fie $a, b, c \in (0, \infty)$. Să se demonstreze inegalitatea
$$\frac{a\,(a+b)^2}{b+c} + \frac{b\,(b+c)^2}{c+a} + \frac{c\,(c+a)^2}{a+b} \geq 2\left(a^2+b^2+c^2\right).$$
Costel Anghel, Bircii

Clasa a IX-a

1. Rezolvați ecuațiile:

(a) $x \cdot [x] = 1 + \{x\}$;

(b) $[4x] - [2x] = \dfrac{3x-1}{2}$.

Mihai Florea Dumitrescu, Potcoava

2. Pe o tablă sunt scrise numerele 14, 5 și 2016. Se repetă următoarea operație: se aleg două numere de pe tablă și se adaugă pe tablă suma și diferența lor.

(a) Ce numere vor fi scrise pe tablă după prima operație, dacă se aleg 2016 și 5?

(b) Este posibil ca, la un moment dat, suma numerelor scrise pe tablă să fie 2016^2? Justificați raspunsul.

Costel Anghel, Bircii

3. Rezolvați în $\mathbb{N}$ ecuațiile:

(a) $1 + 3 + 5 + \ldots + x = \sqrt{3^{2016}}$;

(b) $1 + 3 + 5 + \ldots + x = \sqrt{3^{x-1}}$.

Gheorghe Boroica, Baia Mare, Supliment G.M.-B nr. 9/2015

4. Fie $ABCD$ un patrulater convex și M, N, P puncte pe segmentele (AB), (BC), respectiv (CD), astfel încât $\dfrac{MB}{MA} = \dfrac{BN}{NC} = \dfrac{DP}{PC}$. Fie R și S mijloacele segmentelor $[AN]$, respectiv $[MP]$. Arătați că $RS||AD$.

Mihai Florea Dumitrescu, Potcoava

Clasa a X-a

1. Fie funcțiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ și $g(x) = bx + a$, $a, b \in \mathbb{R}^*$. Să se arate că reprezentările grafice ale funcțiilor fog^{-1} și gof^{-1} nu pot fi perpendiculare.

Mihai Florea Dumitrescu, Potcoava

2. Să se determine suma numerelor $z \in \mathbb{C}$, $|z| = 1$ care satisfac condiția $|z^2 + z \cdot \overline{z} + \overline{z}^2| = 1$.

***

3. (a) Să se determine numărul real m, astfel încât ecuația $9^x - m \cdot 3^x - m + 8 = 0$ să aibă o singură soluție reală.
   (b) Să se rezolve ecuația $9(27^x + 27^{-x}) - 73(3^x + 3^{-x}) = 0$.

Iuliana Trașcă, Margineni

4. Să se demonstreze identitatea
$$\left[1 + (k+1) \cdot \frac{C_n^k + C_n^{k+1}}{C_n^k} - \frac{n-k+1}{k+1} \cdot \frac{C_{n+1}^k}{C_{n+1}^{k+1}}\right]^2 = (n-k+1) \cdot (k+1) \cdot \frac{C_{n+1}^k \cdot C_{n+1}^{k+1}}{(C_n^k)^2}.$$

$\boxed{\textit{Octavian Marinescu-Ghemeci}}$

Clasa a XI-a

1. În mulțimea $M_2(\mathbb{R})$ se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Arătați că matricea $A^n + B^n$ este inversabilă pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Mihai Florea Dumitrescu, Potcoava

2. Determinați matricea $A \in M_2(\mathbb{R})$, știind că $A^3 = \begin{pmatrix} 471 & 600 \\ 75 & 96 \end{pmatrix}$, tr $(A) = 9$ și tr $(A^2) = 69$.

Daniela Haret, Brăila, Supliment G.M.-B nr. 12/2013

3. Considerăm funcțiile $f, g, h : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x \ln(x+e), & x \in (0, \infty) \\ [2x] & x \in (-\infty, 0) \end{cases}$,
$g(x) = \begin{cases} x \ln x, & x \in (0, \infty) \\ [x] + 1 & x \in (-\infty, 0) \end{cases}$, $h(x) = \dfrac{2x \sin x}{1 + x^2}$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului x.
   (a) Studiați existența limitelor funcțiilor f, g, h în $x_0 = 0$.
   (b) Calculați $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - g(x))$ și $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - g(x))$.

(c) Demonstrați că $|h(x)| \leq \dfrac{2}{|x|}, \forall x \in \mathbb{R}^*$.

(d) Calculați $\lim\limits_{x\to\infty} h(x)$ și $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)$.

(e) Calculați $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{h(x)}{g(x)}$.

***

4. (a) Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2+x}, & x\leq -1\\ \dfrac{ax^2+a}{x+1}, & x>-1\end{cases}$. Aflați $a\in\mathbb{R}$ astfel încât asimptotele oblice ale graficului funcției f să fie paralele.

(b) Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție astfel încât $|\cos x - e^x + f(x)| \leq x^{2016}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$. Demonstrați că $f(0)=0$ și că f este continuă în 0.

***

Clasa a XII-a

SUBIECTUL I

1. Aflați rația progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, dacă $a_{200}=2016$ și $a_{100}=1516$.

2. Calculați aria triunghiului determinat de punctele de intersecție ale graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-4x+3$ cu axele Ox și Oy.

3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{x+2}=\sqrt{5}$.

4. Calculați probabilitatea ca alegând una dintre submulțimile cu 3 elemente ale mulțimii $\{1,2,3,\ldots,9\}$, aceasta să fie formată doar din numere prime.

5. Calculați distanța dintre dreptele de ecuații $y=2x+4$ și $y=2x-3$.

6. Calculați $\cos x$, știind că $x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$ și $\sin x=\dfrac{3}{5}$.

SUBIECTUL al II-lea

1. Se dă matricea $A(x)=\begin{pmatrix} x & 0 & 2\\ 1 & x & 6\\ 0 & 0 & x\end{pmatrix}, x\in\mathbb{R}$.

(a) Aflați $x\in\mathbb{R}$ pentru care $\det A(x)=1$.

(b) Aflați $n\in\mathbb{N}^*$ pentru care $\det(A(1)+A(2)+\ldots+A(n))=\det A(2016)$.

(c) Calculați $(A(1))^{-2}$.

2. Se consideră polinomul $f = X^3 - 2X^2 + X + m$, unde $m \in \mathbb{R}$, și fie $x_1,\ x_2,\ x_3$ rădăcinile sale.

   (a) Aflați $m \in \mathbb{R}$, pentru care $f \vdots (X-1)$.

   (b) Aflați $m \in \mathbb{R}$, pentru care $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$.

   (c) Să se determine valorile lui m pentru care f are o rădăcină dublă.

SUBIECTUL al III-lea

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 3e^2}\right)$.

   (a) Calculați $\lim\limits_{x \to e} \dfrac{\ln\left(x + \sqrt{x^2+3e^2}\right) - \ln(3e)}{x - e}$.

   (b) Arătați că f este concavă pe $[0, \infty)$.

   (c) Calculați $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\ln(e-x)}{f(x)}$.

2. Pentru fiecare număr natural nenul n considerăm funcțiile $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n \ln(1+x^2)$ și $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^2}$.

   (a) Calculați $\int_0^1 f_1(x)dx$.

   (b) Calculați $\int_0^1 (g_{2018}(x) + g_{2016}(x))dx$.

   (c) Aflați aria suprafeței determinate de graficul funcției g_3, axa Ox și dreptele de ecuații $x = -1$ și $x = 1$.

Test propus de *Costel Anghel*, Bircii și *Florea Badea*, Scornicești

Premianții acestui concurs au fost următorii:

Clasa a V-a: Premiul I: *Popa Filip* (C.N. ,,Ion Minulescu", Slatina); Premiul al II-lea: *Ciocârlan Cristina* (Șc. Gimn. ,,Virgil Mazilescu", Corabia); Premiul al III-lea: *Nedelea Irina* (Șc. Gimn. ,,Virgil Mazilescu", Corabia).

Clasa a VI-a: Premiul I: *Mărgheanu Cristina* (Șc. Gimn. ,,Eugen Ionescu", Slatina); Premiul al II-lea: *Barbu Robert* (Șc. Gimn. ,,Mihai Eminescu", Pitești); Premiul al III-lea: *Simionescu Mihai* (Șc. Gimn. ,,Eugen Ionescu", Slatina).

Clasa a VII-a: Premiul I: *Vădăstreanu Robert Eugen* (Șc. Gimn. ,,Eugen Ionescu", Slatina); Premiul al II-lea: *Coneschi Vlad* (Șc. Gimn. ,,Eugen Ionescu", Slatina, elev de clasa a VI-a !), Premiul al III-lea: *Dan Eliana* (Șc. Gimn. ,,Eugen Ionescu", Slatina).

Clasa a VIII-a: Premiul I: *Stanciu Ciprian* (Șc. Gimn. Nr.3, Slatina); Premiul al II-lea: *Monete Maria* (Șc. Gimn. ,,Eugen Ionescu", Slatina); Premiul al III-lea: *Matei Alexandra* (Șc. Gimn. ,,Eugen Ionescu", Slatina), *Ionică Teodora* (C.N. ,,Radu Greceanu", Slatina), *Popescu Adelina* (Șc. Gimn. ,,Eugen Ionescu", Slatina).

Clasa a IX-a: Premiul I: *Dincă Cătălin* (C.E. Râmnicu Vâlcea); Premiul al II-lea: *Enache Radu* Florian (C.E. Râmnicu Vâlcea); Premiul al III-lea: *Bălășoiu Cristina* (C.E. Râmnicu Vâlcea), *Chiru Diana* (C.N. ,,Ion Minulescu", Slatina).

Clasa a X-a: Premiul I: *Floreanu Mădălina* (C.N. ,,Ion Minulescu", Slatina); Premiul al II-lea: *Velcea Ana Maria* (Liceul ,,Ștefan Diaconescu", Potcoava); Premiul al III-lea: *Danciu Ana Maria Cristina* (Liceul ,,Ștefan Diaconescu", Potcoava).

Clasa a XI-a: Premiul I: *Dumitra Elena Alexandra* (C.E. Râmnicu Vâlcea); Premiul al II-lea: *Spiridon Gabriela* (C.N. ,,Ion Minulescu", Slatina); Premiul al III-lea: *Arapu Elena Luiza* (Liceul ,,Ștefan Diaconescu", Potcoava).

Clasa a XII-a: Premiul I: *Bazgă Ileana Mihaela* (Liceul ,,Ștefan Diaconescu", Potcoava); Premiul al II-lea: *Cochinescu Iuliana Irina* (Liceul ,,Ștefan Diaconescu", Potcoava); Premiul al III-lea: *Ștefan Andrei Robert* (Liceul ,,Ștefan Diaconescu" Potcoava), *Voicu Maria Mădălina* (Liceul ,,Ștefan Diaconescu", Potcoava).

Doamna profesoară Ileana Marinescu-Ghemeci a acordat *Premiul Special Marinescu-Ghemeci Octavian* elevilor *Popa Filip* (C.N. ,,Ion Minulescu", Slatina) și *Bazgă Ileana Mihaela* (Liceul ,,Ștefan Diaconescu", Potcoava).

Prezentarea Concursului Interjudețean de Matematică „MARINESCU–GHEMECI OCTAVIAN”, Ediția a VI-a, Potcoava, 13 mai 2017

Mihai Florea DUMITRESCU[1]

I.S.J. Olt și Liceul „Ștefan Diaconescu” din Potcoava au organizat în data de 13 mai 2017 Concursul Interjudețean de Matematică „Marinescu-Ghemeci Octavian”, ediția a VI-a, adresat elevilor de gimnaziu și elevilor de liceu având examenul de Bacalaureat de tip M2. Președintele concursului a fost conf. univ. dr. Costel Bălcău de la Universitatea din Pitești.

La concurs au participat 172 de elevi din județele Argeș, Olt și Vâlcea.

Subiectele au fost selectate de o comisie formată din conf. univ. dr. Costel Bălcău, prof. Costel Anghel, prof. Florea Badea și prof. Mihai Florea Dumitrescu.

Elevii câștigători au primit, pe lângă diplome, și premii în bani acordate de către domnul Nicușor Manuel Enăchioaia, primarul orașului Potcoava. Au fost acordate și patru premii speciale de către doamna profesoară Ileana Marinescu-Ghemeci.

Elevele Meșină Maria și Velcea Elena Georgiana de la Liceul „Ștefan Diaconescu” Potcoava au devenit reportere pe perioada desfășurării concursului. Iată interviurile realizate, sub forma unor întrebări (I) și răspunsuri (R).

- Cu doamna profesoară Ileana Marinescu-Ghemeci:

  I: Cum vă simțiți știind că acest concurs poartă numele soțului dumneavoastră?

  R: Este ceva aparte, care nu se poate descrie. Dar oricum, întotdeauna am emoții când este vorba de acest concurs.

  I: Ce impact are asupra dumneavoastră faptul că tot mai mulți elevi se înscriu anual?

  R: Mă bucur că de la an la an numărul concurenților crește și valoarea concurenților care vin este destul de mare, iar aceasta se vede după rezultatele pe care le obțin și după premiile care se dau.

[1]Profesor, Liceul „Ștefan Diaconescu”, Potcoava, florin14mihai@yahoo.com

I: Cum era domnul Marinescu-Ghemeci Octavian ca om, ca profesor?

R: Era un om care iubea copiii, lucra foarte frumos cu ei și foarte mult, avea simțul umorului și, deși era un obiect greu matematica, pentru unii elevi era o plăcere să facă ora cu dânsul la clasă.

I: Credeți că în viitor concursul se va extinde?

R: Deja mi se pare că s-a mai extins. Inițial era numai județean și avem deja participanți din Vâlcea de anul trecut și acum și din Pitești, dacă nu greșesc. În timpul în care domnul Marinescu era profesor, liceul era renumit, pentru că el lucra foarte mult din Gazeta Matematică cu elevii și a participat la toate concursurile, iar elevii din acest liceu au luat diverse premii. Iar la Gazeta Matematică, datorită rezolvărilor pe care le-a avut, a obținut locul cinci pe țară, nu mai știu sigur în ce an.

I: Considerați că se mai poate lucra la organizare?

R: Întotdeauna este loc de mai bine. Dar eu zic că este o organizare destul de bună, participarea destul de largă; la început a fost numai pentru liceu, iar după un an sau doi s-a extins la gimnaziu, deci lucrurile merg destul de bine.

I: Doriți să amintiți ceva legat de acest concurs?

R: Păi am participat de la prima ediție a concursului, când am ținut și un cuvânt de deschidere referitor la viața și activitatea profesorului Marinescu-Ghemeci Octavian, care era un profesor dăruit școlii și elevilor, și am luat parte în continuare la celelalte ediții. Anual oferim premii speciale, unul, două, trei, ... depinde cât a stabilit comisia de corectori, pentru elevii care obțin cel mai mare punctaj sau care au soluții deosebite. Mă gândesc că-i stimulează pe elevi, pe lângă premiile care se dau în mod obișnuit la un concurs.

- Cu domnul primar Nicușor Manuel Enăchioaia:

I: Ce părere aveți despre acest concurs?

R: Este foarte bine că s-a realizat și îmi place că de la an la an vin tot mai mulți copii, din mai multe județe. Cred că este o reclamă foarte bună pentru localitate, pentru liceu, dar și pentru voi, ca elevi, să vă pregătiți. Este o reușită.

I: Organizarea poate fi îmbunătățită?

R: Așa cred și așa am și observat, pentru că de la an la an a fost tot mai bine. Cred și sper ca la un moment dat să ajungă chiar concurs național, de la interjudețean, cum este acum. Bineînteles, primaria va acorda sprijin în continuare și cred că se poate. Alături de conducerea școlii, de comisie, de domnul profesor Bălcău, care este și președintele comisiei, cred că putem să-l facem și mai bun.

I: Ce apreciați la acest concurs?

R: Cred că este un lucru foarte bun. Concursul este organizat pentru comemorarea domnului Marinescu-Ghemeci Octavian, care a fost un profesor de seamă al liceului, chiar al județului Olt, un profesor de matematică strălucit, care a îndrumat și ajutat mulți elevi aici, iar aceștia au ajuns, în timp, personalități în rândul matematicii. În final, sper să fie bine pentru toată lumea, succes participanților și să meargă în continuare concursul.

- Cu domnul conferențiar Costel Bălcău:

I: Care este implicarea dumneavoastră în acest concurs?

R: Încă de la început am fost președintele concursului, nu doar pentru că trebuia să fie ales un profesor de la Universitate. Eu am făcut liceul aici, ca și voi, iar domnul profesor în cinstea căruia se organizează concursul mi-a fost profesor și model. Astfel m-am gândit, împreună cu profesorii de matematică de aici, domnii Dumitrescu și Mogoșanu, să facem acest concurs.

I: Când a pornit inițiativa concursului?

R: Suntem în al șaselea an, asta înseamnă că încă din anul 2012.

I: Care este nivelul de dificultate al subiectelor?

R: Subiectele nu sunt ușoare, pentru că este un concurs serios. În afară de clasa a VIII-a, unde se dau subiecte după modelul examenului național, și de clasa a XII-a, după cel de Bacalaureat, subiectele sunt ca la olimpiadă. La gimnaziu cred că se atinge nivelul județean. Nu este olimpiada națională, dar o ,,Olteniadă", cum glumim noi, tot este!

- Cu doamna Ivana Mihaela de la Liceul Potcoava, fostă elevă a profesorului Marinescu-Ghemeci Octavian:

I: Cum era domnul Marinescu-Ghemeci ca profesor?

R: Un profesor deosebit, care mi-a implantat dragostea pentru matematică, chiar dacă este un obiect dificil, care cere multă muncă. Pe lângă exercițiile din manual, lucram foarte mult din Gazeta Matematică și din culegerile de matematică. Era un profesor foarte devotat școlii, iar elevii domnului profesor participau cu succes la olimpiadele și concursurile școlare. De asemenea, ponderea elevilor care erau admiși la Facultate era foarte mare în fiecare an. În ciuda ,,renumelui" de ,,profesor exigent", domnul profesor avea calitatea de a degaja o atmosferă placută prin micile glume strecurate printre exercițiile intense care se desfășurau pe tablă.

I: Cum vedeți inițiativa desfășurării acestui concurs?

R: Este un omagiu adus domnului profesor și sper ca această tradiție să se mențină.

- Doamna profesoară Cristina Smarandache (Colegiul Economic Râmnicu Vâlcea):

  I: Cum vi s-au părut subiectele?

  R: Foarte bune. Nici exagerat de grele, nici să-ți bați joc de concurs. Foarte bune.

  I: Ce părere aveți despre organizare?

  R: Îmi place că organizați an de an și uite așa o să câștigați respect, căci se aude de la unul, de la altul și copiilor le-a plăcut să vină.

  I: Dar despre personal?

  R: Un colectiv extraordinar. Vorbim de la distanță, aducem copiii pe ultima sută de metri, căci se mai întâmplă să se mai îmbolnăvească. Foarte, foarte binevoitori. În general, se mai enervează oamenii, se mai ceartă... Dar aici totul e perfect.

  I: Credeți că în timp se va dezvolta?

  R: Eu așa zic. Pentru că în momentul în care respecți un concurs, și el te va respecta pe tine.

- Elev participant (Pârvan Adrian, Liceul Tehn. ,,Constantin Brâncoveanu"):

  I: Cum ți s-au părut subiectele?

  R: Nici foarte grele, nici foarte ușoare.

  I: Ai mai participat la acest concurs?

  R: Nu, este pentru prima dată.

  I: Ce impresie ți-a lăsat? Merită să mai încerci și anul viitor?

  R: O impresie bună. Da.

- Elev participant (Slatina):

  I: În ce clasă ești?

  R: A VIII-a.

  I: Cum ți s-au părut subiectele?

  R: Au fost OK.

  I: Le-ai rezolvat pe toate?

  R: Da, dar doar pe cele pentru examen.

  I: Ai mai veni?

  R: Nu știu, probabil că da.

- Elev participant (Vâlcea):

  I: Este prima oară când participi la acest concurs?

R: Am mai fost și anul trecut.

I: Cum ți s-au părut subiectele? Au fost grele?

R: Da, au fost foarte grele subiectele.

I: Ai avut vreo nemulțumire legată de organizarea concursului?

R: Nu, a fost OK.

- Elev participant (Enceanu Miruna):

I: În ce clasă ești?

R: A IX-a.

I: Cum ți s-au părut subiectele?

R: Cam grele...

I: Ai mai luat parte la o altă ediție?

R: Nu, e prima oară.

I: Și ai mai vrea să participi?

R: De ce nu?

- Elev participant (Coman Geanina Carolina, Liceul Tehnologic Tufeni):

I: Cum ți s-au părut subiectele?

R: Pai, unele au fost mai ușoare, altele mai grele...

I: Ce părere ai despre acest concurs? Ai mai luat parte la edițiile anterioare?

R: Da, de două ori până acum. Și este o idee foarte bună. Exercițiile sunt consistente, conțin ceea ce trebuie să învățăm într-un an întreg.

I: Ai vreo nemulțumire legată de concurs?

R: Nu.

- Elev participant (Liceul Economic Râmnicu Vâlcea):

I: În ce clasă ești?

R: A XII-a.

I: Cum ți s-au părut subiectele?

R: Super OK.

I: Ai mai participat?

R: Da, anul trecut.

I: Cum ai aflat de concurs?

R: Profesorii mei au primit invitație și m-au luat și pe mine. Am fost de la mai multe clase.

- Elev participant (Valentin Dumitrescu, C.N. ,,Radu Greceanu" Slatina):

I: În ce clasă ești?

R: A XI-a.

I: Cum ți s-au părut subiectele?

R: Frumoase rău de tot, dar asimptotele alea m-au terminat. Nu se simplifică. Nu știu... Nu mi-au ieșit.

I: Ai rezolvat toate subiectele?

R: Da, le-am abordat pe toate; nu le-am terminat.

I: Ai mai luat parte la acest concurs?

R: Am mai fost într-a IX-a.

I: Intenționezi să mai vii?

R: Posibil. Dacă se mărește premiul!

I: Ce impresie ți-a lăsat concursul?

R: O impresie foarte bună.

I: Dar organizarea?

R: OK.

- Elev participant (Velcea Ana Maria, Liceul ,,Ștefan Diaconescu" Potcoava):

I: În ce clasă ești?

R: În clasa a XI-a.

I: Fiind participant și totodată elev al acestui liceu, ce impresie ți-a lăsat desfășurarea acestui concurs în instituția în care studiezi?

R: Cred că este una dintre implicările valoroase ale liceului.

I: Ce face special concursul Marinescu-Ghemeci Octavian?

R: Particip de trei ani la acest concurs și, sincer, niciodată nu am regretat acest lucru. Ce am apreciat, în principal, anul acesta, au fost subiectele. Nu au fost abordate banalele subiecte din manual și, în plus, s-a pus foarte mult accent pe atenția și imaginația elevilor.

I: Te-a atras vreun subiect în mod special?

R: Mi s-a părut foarte interesant subiectul IV, o problemă frumoasă, practică. Demonstrează că matematica nu se rezumă doar la formule sau calcule, ci poate simplifica viața de zi cu zi. Indiferent de punctajul obținut, faptul că am participat, cât și momentele intense, sunt categoric un câștig.

Prezentăm în continuare subiectele propuse în concurs.

Clasa a V-a

1. (a) Calculați $1 + 7^1 + 7^2 + 7^3$.

   (b) Fie $n = 1 + 7^1 + 7^2 + \cdots + 7^{2017}$. Aflați ultimele două cifre ale lui n și stabiliți dacă acesta este pătrat perfect.

Costel Anghel, Bircii

2. Pe un ecran, în prima secundă este afișat numărul 42. Apoi, în fiecare secundă, se înlocuiește numărul afișat cu numărul obținut prin adunarea produsului cifrelor numărului cu 21.

   (a) După câte secunde este afișat numărul 63?

   (b) Ce număr este afișat după 2017 secunde?

Costel Anghel, Bircii

3. Determinați numărul natural x și cifrele a și b, în baza 10, astfel încât

$$(6x + 180)^2 = \overline{a051b}.$$

Florea Badea, Scornicești și *Costel Anghel*, Bircii

4. Se consideră mulțimea de numere naturale $M = \{7, 8, 9, \ldots, 504\}$. Să se arate că această mulțime se poate scrie ca reuniune de submulțimi cu câte două elemente fiecare, disjuncte două câte două, iar suma elementelor fiecărei submulțimi să fie cub perfect.

Costel Anghel, Bircii

Clasa a VI-a

1. Aflați numerele prime $a,\ b,\ c$ știind că $a + b + abc = 168$.

Florea Badea, Scornicești și *Costel Anghel*, Bircii

2. Pe o tablă sunt scrise numerele: 2,5,6,7,8,9,10,13,31. Doi elevi au șters câte patru numere de pe tablă și au remarcat că suma numerelor șterse de primul elev este de trei ori mai mică decât suma numerelor șterse de al doilea elev. Ce număr a rămas scris pe tablă?

Costel Anghel, Bircii

3. Scrise în baza 10, numerele 4^{1009} și 25^{1009} au p, respectiv q cifre. Arătați că $p + q$ este produsul a două numere prime.

Stelian Corneliu Andronescu și *Costel Bălcău*, Pitești

4. Se consideră triunghiul isoscel ABC cu $AB = AC$ și $m(\widehat{BAC}) = 40°$. Fie AD înălțimea din $A, D \in (BC)$. Perpendiculara dusă din B pe bisectoarea unghiului $\widehat{DAB}$ o intersectează pe aceasta în M și dreapta AD în N. Pe semidreapta $(BN$ considerăm punctul P astfel încât $CN = CP$, $N \neq P$. Determinați măsura unghiului $\widehat{CAP}$.

Costel Anghel, Bircii

Clasa a VII-a

1. Există numere naturale n astfel încât $m = \sqrt{n + \sqrt{2010}} - \sqrt{n - \sqrt{2010}} \in \mathbb{N}$? Justificați răspunsul.

Florea Badea, Scornicești și *Costel Anghel*, Bircii

2. Se consideră numerele $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Să se arate că $A \in \mathbb{Z}$, unde

$$A = \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}\right) \cdot \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} - \frac{3}{a+b+c}\right)^{-1}.$$

Numerele $a,\ b,\ c$ sunt alese astfel încât toate operațiile să aibă sens.

Florea Badea, Scornicești și *Costel Anghel*, Bircii

3. Fie $p > 5$ un număr prim și $n = p^4 + p^8 + p^{12} + \ldots + p^{8068} - 1537$. Să se arate că numărul n se divide cu 240.

Stelian Corneliu Andronescu și *Costel Bălcău*, Pitești

4. Fie $ABCD$ un paralelogram și d o dreaptă arbitrară care taie semidreptele $[AB$ și $[CB$ în punctele M, respectiv N. Patru drepte paralele duse prin vârfurile A, B, C, D ale paralelogramului intersectează dreapta d în punctele A', B', C', respectiv D'. Să se arate că:

   (a) $DD' = AA' - BB' + CC'$, dacă d intersectează $[AB \setminus [AB]$, respectiv $[CB \setminus [CB]$;

   (b) $DD' = AA' + BB' + CC'$, dacă d intersectează interioarele laturilor (AB) și (BC).

Costel Anghel, Bircii

Clasa a VIII-a

SUBIECTUL I (Pe foaia de examen se trec doar rezultatele)

1. Rezultatul calculului $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$ este ....
2. Cel mai mare număr de forma $\overline{91x}$ divizibil cu 7 este ....
3. Scrisă ca interval, mulțimea $I = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| -1 < \frac{x-1}{3} \leq 1\right\}$ este $I =$....
4. Perimetrul pătratului cu diagonala de lungime $\frac{1}{\sqrt{2}}$ cm este egal cu ... cm.
5. Un tetraedru regulat are suma tuturor muchiilor egală cu 36 cm. Aria totală a tetraedrului este egală cu ... cm^2.
6. Lotul echipei de fotbal a școlii este format din 12 elevi. Numărul lor și vârstele corespunzătoare sunt înscrise în tabelul de mai jos:

Vârstă (ani)	10	11	12	13	14
Număr elevi	2	3	4	2	1

   Media aritmetică a vârstelor elevilor din echipa de fotbal este egală cu ....

SUBIECTUL al II-lea

1. Desenați, pe foaia de examen, un paralelipiped dreptunghic $ABCDMNPQ$.
2. Calculați $E = 1 + \frac{\sqrt{3}-3}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}+1}$.

3. Suma a patru numere naturale este 1026. Să se afle numerele, știind că suma primelor două numere este 549, suma primelor trei este 911, iar suma ultimelor trei este 796.

4. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = ax + b$, unde $a, b \in \mathbb{R}$.

   (a) Arătați că $f(1) + f(4) = f(2) + f(3)$.

   (b) Pentru $a = 2$ și $b = -4$, reprezentați grafic funcția f într-un sistem de axe ortogonale xOy.

5. Se consideră expresia $E(x) = (x+3)^2 + 2(x-4)(x+3) + (x-4)^2$. Arătați că $E(x) = (2x-1)^2$.

SUBIECTUL al III-lea

1. O masă de biliard are forma unui dreptunghi $ABCD$, în care $AB = 18$ dm și $AD = 12$ dm.

   (a) Aflați aria dreptunghiului $ABCD$.

   (b) Dacă P este mijlocul lui $[BC]$, aflați perimetrul triunghiului ADP.

   (c) Din punctul M, mijlocul lui $[AD]$, este lansată o bilă care atinge latura AB în N și apoi ajunge în C. Știind că $\sphericalangle ANM \equiv \sphericalangle CNB$, arătați că $m(\sphericalangle MNC) = 90°$.

2. Fie $VABCD$ o piramidă patrulateră regulată cu baza $ABCD$. Latura bazei este egală cu $12\sqrt{3}$ cm și apotema piramidei este egală cu 12 cm.

   (a) Calculați volumul piramidei.

   (b) Determinați măsura unghiului făcut de planul unei fețe laterale cu planul bazei.

   (c) La ce distanță de A trebuie luat un punct $P \in (AV)$ astfel încât aria triunghiului PDB să fie minimă?

SUBIECTUL al IV-lea

1. Fie a, b, c numere reale strict pozitive, care verifică relația $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Să se demonstreze inegalitatea $\dfrac{1}{a+bc} + \dfrac{1}{b+ca} + \dfrac{1}{c+ab} \geq \dfrac{3}{2}$.

2. Fie $SABCD$ o piramidă patrulateră regulată cu $m(\widehat{ASB}) = 36°$. În triunghiul SBC, bisectoarea unghiului $\widehat{SBC}$ intersectează pe SC în M.

   (a) Să se arate că $AM \perp SC$.

   (b) În planul (SAC) construim $AN \perp AS,\ N \in SC$. Să se arate că triunghiul BNS este isoscel.

Costel Anghel, Bircii

Clasa a IX-a

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2017(2x-2018)$.
   (a) Calculați imaginea funcției $f\circ f$;
   (b) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $(\underbrace{f\circ f\circ\ldots\circ f}_{2017 \text{ de } f})(x)=2018$.

2. Se consideră $x\in\left[\dfrac{5\pi}{4},\dfrac{7\pi}{4}\right]$ astfel încât $\sin 2x=\dfrac{4\sqrt{2}}{9}$.
   (a) Calculați $\sin 4x$;
   (b) Calculați $\sin 3x$.

3. În planul triunghiului ABC se consideră punctele M, N, P și Q astfel încât $\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BN}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC}$, $\{P\}=AN\bigcap CM$ și $\{Q\}=BP\bigcap AC$.
   (a) Arătați că $9\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=6\overrightarrow{AC}$;
   (b) Determinați numărul real p pentru care $\overrightarrow{CQ}=p\overrightarrow{CA}$.

4. Dorel deține 400 de acțiuni pentru care are oferte de cumpărare de la două societăți, A și B. Pentru n acțiuni ($n\in\mathbb{N}$), societatea A îi oferă un preț egal cu $2000n-n^2$ lei, iar societatea B un preț egal cu $2000n-2n^2$ lei. Dorel dorește să vândă toate acțiunile, prin cel mult câte o tranzacție cu fiecare din cele două societăți.
   (a) Dacă se hotărăște să vândă toate acțiunile la o aceeași societate, care este prețul maxim pe care il poate obține?
   (b) Dar dacă se hotărăște să vândă acțiuni către ambele societăți?

Stelian-Corneliu Andronescu și *Costel Bălcău*, Pitești

Clasa a X-a

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C},\ \ f(z)=20z-17\bar{z}$.
   (a) Arătați că funcția f este inversabilă și determinați inversa sa;
   (b) Calculați $(\underbrace{f\circ f\circ\ldots\circ f}_{n \text{ de } f})(1+i)$, unde $n\in\mathbb{N},\ n\geq 2$.

2. (a) Arătați că $\dfrac{C_{2017}^1+2C_{2017}^2+3C_{2017}^3+\ldots+2017C_{2017}^{2017}}{C_{2017}^1+C_{2017}^3+C_{2017}^5+\ldots+C_{2017}^{2017}}\in\mathbb{N}$;
   (b) Arătați că numărul 2017! se divide cu $(1008!)^2$ și cu $673!\cdot(672!)^2$.

3. Rezolvați ecuațiile:

   (a) $3\sin x - \sqrt{3}\cos x = \sqrt{6},\quad x \in [-3\pi, 3\pi);$

   (b) $\arcsin x + \arccos \dfrac{1}{3} = \pi,\quad x \in \mathbb{R}.$

4. Înaintea unui meci de tenis între jucătorii A și B, un parior a selectat următoarele două oferte (la case de pariuri diferite):

   - Varianta 1: cotă 1,7 pentru pariul ,,câștigă A" (adică dacă pariorul joacă (plătește) o sumă S pentru această ofertă, atunci el va încasa $1{,}7 \cdot S$ dacă jucătorul A câștigă și nimic în caz contrar);
   - Varianta 2: cotă 2,5 pentru pariul ,,câștigă B".

   Pariorul dispune de o sumă de 1700 lei, pe care vrea să o joace în totalitate pe cele două oferte.

   (a) Ce sume trebuie să joace pe fiecare dintre cele două variante, pentru a avea un profit sigur, indiferent de rezultatul meciului?

   (b) Dar pentru ca acest profit sigur să fie maxim? Să se determine și valoarea profitului sigur maxim.

   Se cunoaște că orice meci de tenis are întotdeauna un unic câștigător.

   Stelian-Corneliu Andronescu și *Costel Bălcău*, Pitești

Clasa a XI-a

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ a & 1 & b \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, unde $a, b \in \mathbb{R}$.

   (a) Arătați că $A(A^2 - 4I_3) = A^2 - 4I_3$;

   (b) Calculați suma elementelor matricei A^{2017}.

2. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1, -2)$, $B(0, 1)$, $C(-2, 0)$ și $D(m, n)$, unde $m, n \in \mathbb{N}^*$.

   (a) Fie d dreapta care trece prin punctul A și este paralelă cu dreapta BC, iar h dreapta care trece prin punctul B și este perpendiculară pe dreapta AC. Determinați coordonatele punctului de intersecție dintre dreptele d și h.

   (b) Arătați că punctele A, B și D sunt vârfurile unui triunghi și că acest triunghi nu este echilateral.

3. Se consideră funcția $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + 1 + \sqrt{bx^2 + cx + 2}$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$, $b > 0$, iar D este domeniul maxim de definiție al funcției f. Determinați parametrii a, b și c astfel încât graficul funcției f să admită axa Ox drept asimptotă spre $+\infty$, iar spre $-\infty$ o asimptotă paralelă cu dreapta de ecuație $3x + 4y + 5 = 0$.

4. O societate comercială produce și vinde ciment în două regiuni, A și B. În fiecare regiune societatea vinde doar ciment produs în acea regiune. Costurile de fabricație sunt de 0,24 lei/kg în regiunea A și de 0,22 lei/kg în regiunea B, iar prețurile de vânzare sunt de 0,3 lei/kg în regiunea A și de 0,27 lei/kg în regiunea B. S-a constatat că vânzările sunt direct proporționale cu radicalul sumelor investite în publicitate. Mai precis, vânzările în regiunile A și B sunt egale cu $5000\sqrt{x}$ kg, respectiv $8000\sqrt{y}$ kg, unde x și y reprezintă sumele (în lei) investite în publicitate în regiunile A, respectiv B. Cunoscând că suma totală alocată pentru publicitate este de 5000 lei, să se determine cum trebuie împărțită această sumă pe cele două regiuni astfel încât profitul firmei să fie maxim și să se calculeze acest profit maxim.

Stelian-Corneliu Andronescu și *Costel Bălcău*, Pitești

Clasa a XII-a

SUBIECTUL I

1. Se consideră numărul complex $z = (2 + i\sqrt{2})^3 + (2 - i\sqrt{2})^3$. Arătați că $z = \overline{z}$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4x + 3$. Aflați aria triunghiului determinat de punctele de intersecție a graficului funcției f cu axele de coordonate.

3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^x(2^x + 2) = 3$.

4. Care este probabilitatea ca, alegând la întâmplare un element din mulțimea $\{\sqrt{n} | n \in \mathbb{N},\ 3 \le n \le 27\}$, acesta să fie rațional?

5. În sistemul cartezian xOy se consideră punctele $A(2, 2)$, $B(-1, 3)$ și $C(1, -4)$. Determinați ecuația înălțimii din B a triunghiului ABC.

6. Fie triunghiul ABC cu $AB = 3,\ AC = 4,\ BC = 4$. Calculați $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

SUBIECTUL al II-lea

1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} x & 1 \\ -1 & x \end{pmatrix}$, unde x este un număr real.

   (a) Arătați că $aA(b) - bA(a) = (a - b)A(0)$, pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$.

(b) Să se arate că există numerele naturale nenule m și n, astfel încât $\det\big(A(1)+A(2)+\ldots+A(2017)\big)=m^2+n^2$.

(c) Determinați x real, pentru care $\det\left[A(x^2)-I_2\right]=\det\left[A(x)\right]^2$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-6X^2+18X+m$, unde m este un număr real și fie $x_1,\ x_2,\ x_3$ rădăcinile sale.

(a) Aflați câtul și restul împărțirii polinomului f la $X+1$.

(b) Arătați că $\left(\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}\right)\left(\frac{x_2}{x_3}+\frac{x_3}{x_2}\right)\left(\frac{x_3}{x_1}+\frac{x_1}{x_3}\right)=-1$.

(c) Aflați $m\in\mathbb{R}$, știind că $\left(\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_1}\right)\left(\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_2}\right)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_3}\right)=434$.

SUBIECTUL al III-lea

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=e^{2x}+x^2+x+1$.

(a) Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^3}$.

(b) Arătați că funcția f este convexă pe $\mathbb{R}$.

(c) Arătați că $f(x)\geq 3x+2$, oricare ar fi x real.

2. Se consideră funcția $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f_n(x)=\frac{1}{e^{nx}+1},\ n\in\mathbb{N}^*$.

(a) Arătați că $\int_0^1(f_n(x)+f_n(-x))dx=1$.

(b) Arătați că $\int_0^{\ln\sqrt{3}}e^x f_2(x)dx=\frac{\pi}{12}$.

(c) Arătați că $\int_0^1 f_2(x^2)dx\leq\frac{\pi}{8}$.

Premianții concursului au fost:

Clasa a V-a: Premiul I: *Bolborea Radu* (Șc. Gimn. ,,Eugen Ionescu", Slatina); Premiul al II-lea: *Tudorache Robert* (Șc. Gimn. ,,Constantin Brâncoveanu", Slatina); Premiul al III-lea: *Dumitrescu Lucian* (C.N. ,,Ion Minulescu", Slatina).

Clasa a VI-a: Premiul I: *Militaru Marius* (C.N. ,,Ion Minulescu", Slatina); Premiul al II-lea: *Deaconu Radu Andrei* (Șc. Gimn. ,,Mihai Eminescu", Pitești); Premiul al III-lea: *Vălu Andrei* (L.P.S. Slatina).

Clasa a VII-a: Premiul I: *Dobre Andreea* (Șc. Gimn. ,,Eugen Ionescu", Slatina); Premiul al II-lea: *Mărgheanu Cristina* (Șc. Gimn. ,,Eugen Ionescu", Slatina); Premiul al III-lea: *Ștefănescu Anastasia* (Șc. Gimn. ,,Eugen Ionescu", Slatina).

Clasa a VIII-a: Premiul I: *Amza Cristina* (L.P.S. Slatina); Premiul al II-lea: *Călinescu Daniel* (Șc. Gimn. ,,Eugen Ionescu", Slatina), *Gavrilă Andrei* (Șc.

Gimn. ,,Constantin Brâncoveanu”, Slatina); Premiul al III-lea: *Vădăstreanu Robert* (Şc. Gimn. ,,Eugen Ionescu”, Slatina).

Clasa a IX-a: Premiul I: *Ivana Alin Mihail* (Liceul ,,Ştefan Diaconescu”, Potcoava); Premiul al II-lea: *Zosin Mihai George* (C.N. ,,Radu Greceanu”, Slatina); Premiul al III-lea: *Minescu Denisa* (C.N. ,,Radu Greceanu”, Slatina).

Clasa a X-a: Premiul I: *Mihăescu Andreea Mădălina* (C.N. ,,Ion Minulescu”, Slatina); Premiul al II-lea: *Pavel Andrei George* (C.N. ,,Ion Minulescu”, Slatina); Premiul al III-lea: *Comandar Andrei Eugen* (C.N. ,,Ion Minulescu”, Slatina).

Clasa a XI-a: Premiul I: *Velcea Ana Maria* (Liceul ,,Ştefan Diaconescu”, Potcoava); Premiul al II-lea: *Floreanu Julia Mădălina* (C.N. ,,Ion Minulescu”, Slatina); Premiul al III-lea: *Dumitrescu Valentin* (C.N. ,,Radu Greceanu”, Slatina).

Clasa a XII-a: Premiul I: *Troană Valentina* (Liceul Tehnologic ,,Constantin Brâncoveanu”, Scorniceşti); Premiul al II-lea: *Arapu Elena Luiza* (Liceul ,,Ştefan Diaconescu”, Potcoava); Premiul al III-lea: *Dumitra Elena Alexandra* (C.E. Râmnicu Vâlcea).

Doamna profesoară Ileana Marinescu-Ghemeci a acordat *Premiul Special Marinescu-Ghemeci Octavian* elevilor *Bolborea Radu* (Şc. Gimn. ,,Eugen Ionescu”, Slatina), *Militaru Marius* (C.N. ,,Ion Minulescu”, Slatina), *Ivana Alin Mihail* (Liceul ,,Ştefan Diaconescu”, Potcoava) şi *Velcea Ana Maria* (Liceul ,,Ştefan Diaconescu”, Potcoava).

TESTE PENTRU EXAMENE

Teste pentru examenul de Evaluare Națională

Costel ANGHEL[1] *și Florea BADEA*[2]

Testul 1

SUBIECTUL I

1. $5 \cdot 0 + 0^5 + 5^0 = \ldots$
2. Perimetrul triunghiului cu laturile 5 cm, 7 cm și 9 cm este egal cu ....
3. Numărul a din proporția $\frac{a}{12} = \frac{100}{3}$ este egal cu ....
4. Aria triunghiului cu laturile de 6 cm, 8 cm și 10 cm este ... cm^2.
5. Apotema unui triunghi echilateral înscris într-un cerc cu raza de 20 cm este ... cm.
6. Media aritmetică ponderată a numerelor 5, 7 și 10 cu ponderile 3, 4 și respectiv 9 este ....

SUBIECTUL al II-lea

1. Desenați un cub $ABCDMNPQ$.
2. Fie funcția $f : (-\infty, 5] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 5$.
   (a) Reprezentați grafic funcția.
   (b) Determinați numerele naturale a știind că $f(5a) + 15 \geq 60$.
   (c) Aflați aria triunghiului determinat de Ox, Oy și G_f.
3. Rezolvați ecuația $|5x - 2| = 18$, $x \in \mathbb{R}$.
4. Rezolvați inecuația $(x + 3)^2 + 24 \leq (x - 1)^2 - 5x - 7$, $x \in \mathbb{R}$.

[1]Profesor, Colegiul Național ,,Ion Minulescu”, Slatina, anghelcostel2012@yahoo.com
[2]Profesor, Școala Gimnazială ,,Nicolae Coculescu”, Scornicești

SUBIECTUL al III-lea

1. Fie $ABCD$ un paralelogram, $BD \perp AD$, $BD = 24$ cm și $AB = 30$ cm.
   (a) Calculați perimetrul lui $ABCD$.
   (b) Calculați lungimea diagonalei $[AC]$.
   (c) Dacă M este mijlocul lui $[AB]$ și $DM \cap CB = \{E\}$, determinați $\mathcal{A}_{ADCE}$.
2. Secțiunea axială a unui trunchi de con circular drept este un trapez isoscel cu diagonalele perpendiculare. Razele sunt direct proporționale cu 2 și 4, iar diagonala trapezului este $24\sqrt{2}$ cm.
   (a) Calculați înălțimea trunchiului de con.
   (b) Calculați aria totală a trunchiului de con.
   (c) Calculați înălțimea conului din care provine trunchiul de con.

Testul 2

SUBIECTUL I

1. $2^2 + 3^3 - 29 = \ldots$.
2. Media geometrică a numerelor $3 + \sqrt{5}$ și $3 - \sqrt{5}$ este $\ldots$.
3. Volumul cubului cu diagonala $5\sqrt{3}$ cm este $\ldots$.
4. Un triunghi dreptunghic are un unghi de $45°$. Dacă o catetă are 12,5 cm atunci înălțimea corespunzătoare ipotenuzei are lungimea de $\ldots$ cm.
5. Suma numerelor întregi din intervalul $\left[-3, \frac{11}{15}\right)$ este egală cu $\ldots$.
6. Măsura unui unghi al unui octogon regulat este egală cu $\ldots$.

SUBIECTUL al II-lea

1. Desenați un cilindru circular drept.
2. Calculați $\sqrt{\left(5\sqrt{3} - 9\right)^2} + |5 - \sqrt{3}| + 8$.
3. Aflați perechile de numere naturale (x, y) pentru care $\dfrac{x+3}{6} = \dfrac{3}{y+2}$.
4. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -5x + 10$.
   (a) Reprezentați grafic funcția.

(b) Determinați punctele de pe G_f având coordonatele numere naturale.
(c) Aflați numărul real a știind că $A(2a; 10) \in G_f$.

SUBIECTUL al III-lea

1. Se dă triunghiul ABC cu $AB = AC = 10$ cm și cu un unghi de $45°$.
   (a) Calculați perimetrul $\triangle ABC$.
   (b) Calculați aria $\triangle ABC$.
   (c) Calculați lungimea înălțimii $[AD]$, $D \in (BC)$.
2. Fie $ABCA'B'C'$ o prismă regulată cu $AB = 12$ m și aria laterală egală cu 360 m^2. Calculați:
   (a) Volumul prismei.
   (b) Distanța dintre centrele de greutate ale triunghiurilor ABC și $AA'B$.
   (c) Distanța de la mijlocul N al muchiei $[AA']$ la planul $(AB'C')$.

Testul 3

SUBIECTUL I

1. $7^{2018} : 7^{2019} \cdot 7 = \dots$.
2. Mulțimea soluțiilor ecuației $x^2 - 3 = 0$, $x \in \mathbb{Z}$ este $\dots$.
3. Aria pătratului cu diagonala de $5\sqrt{2}$ cm este $\dots$ cm^2.
4. Perimetrul unui hexagon regulat cu apotema de 5 dm este $\dots$ dm.
5. Cel mai mic număr natural din intervalul $[-20, 1)$ este $\dots$.
6. Numărul divizorilor naturali ai numărului 412 este egal cu $\dots$.

SUBIECTUL al II-lea

1. Desenați un patrulater ortodiagonal $MNPQ$.
2. Media aritmetică a două numere este 144 iar raportul lor este $\frac{8}{10}$. Aflați numerele.
3. O pereche de pantofi costă 400 lei. După un timp, se ieftinește cu 25%, iar mai apoi se scumpește cu 20%.
   (a) Aflați prețul după ieftinire.

(b) Aflați cu ce procent din prețul inițial s-a micșorat prețul după cele două modificări succesive.

4. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -5x + 2$.

   (a) Reprezentați grafic funcția f.

   (b) Aflați distanța de la punctul $O(0, 0)$ la graficul funcției f.

SUBIECTUL al III-lea

1. Fie $ABCD$ un trapez dreptunghic cu bazele $AD = 3$ cm și $BC = 8$ cm astfel încât $m(\widehat{DMC}) = 90°$, unde M este mijlocul laturii $[AB]$.

   (a) Aflați MD și MC în funcție de AB.

   (b) Calculați aria trapezului.

   (c) Aflați $\sin(\widehat{BCD})$.

2. Fie $ABCA'B'C'$ o prismă regulată cu $AB = 16$ cm și $AA' = 12$ cm și fie $M \in (AC)$ astfel încât $\dfrac{MA}{MC} = \dfrac{1}{2}$.

   (a) Calculați aria totală a prismei.

   (b) Calculați BM.

   (c) Calculați tangenta unghiului format de dreapta $B'M$ cu planul $(AB'C')$.

Teste pentru examenul de Bacalaureat, specializarea științe ale naturii

Mihai Florea DUMITRESCU[1]

Testul 1

SUBIECTUL I

1. Determinați partea reală a numărului complex $z = \dfrac{1+i}{i} + \dfrac{i}{1-i}$.
2. Aflați $m \in \mathbb{R}$, știind că funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - mx + m + 2$ admite un minim mai mare sau egal cu -1.
3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{x+1} = \dfrac{1}{8}$.
4. Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr din mulțimea $\{10, 12, 14, \ldots, 48\}$, acesta să nu fie divizibil cu 3.
5. Într-un sistem cartezian de axe se consideră triunghiul ABC cu vârfurile $A(-3, 0)$, $B(3, 0)$ și $C(0, 3)$. Să se afle coordonatele ortocentrului triunghiului ABC.
6. Calculați $\cos(3\pi - x)$, știind că $\operatorname{tg}(\pi + x) = 3$.

SUBIECTUL al II-lea

1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} x-1 & -x \\ x-1 & -1 \end{pmatrix}$, unde $x \in \mathbb{R}$.

   (a) Calculați $\det(A(2) \cdot A(-2))$.

   (b) Arătați că $(x-1)^2 \cdot I_2 = A(x) \cdot [(x-2) \cdot I_2 - A(x)]$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

   (c) Determinați $x \in \mathbb{R}$, pentru care $\det\left[A(x) + A\left(x^2\right)\right] = 0$.

[1]Profesor, Liceul ,,Ștefan Diaconescu", Potcoava, florin14mihai@yahoo.com

2. Se consideră polinomul $f = X^3 - aX^2 + 11X - a$, unde $a \in \mathbb{R}$ și fie $x_1,\ x_2,\ x_3$ rădăcinile sale.

   (a) Determinați numărul real a, pentru care polinomul f se divide cu polinomul $X - 1$.

   (b) Determinați $a \in \mathbb{R}$, pentru care rădăcinile polinomului f verifică egalitatea $x_1 + x_2 = x_3$.

   (c) Aflați numerele reale a astfel încât are loc egalitatea

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 3 = (x_1x_2)^2 + (x_1x_3)^2 + (x_2x_3)^2 + x_1 + x_2 + x_3.$$

SUBIECTUL al III-lea

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x + \ln\left(x^2 + 1\right)$.

   (a) Arătați că $f'(x) = \dfrac{(x+1)^2}{x^2+1}$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

   (b) Calculați $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

   (c) Arătați că funcția f are două puncte de inflexiune.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{e^x + 1}$.

   (a) Calculați $\int_0^1 e^x \cdot f(x)\,dx$.

   (b) Calculați $\int_0^1 f(x)\,dx$.

   (c) Arătați că $\int_0^1 f(x)\,dx \le \ln \dfrac{3}{2}$.

Testul 2

SUBIECTUL I

1. Suma primilor cinci termeni ai unei progresii aritmetice este egală cu 15. Calculați termenul al treilea.

2. Fie funcțiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - x - 1$ și $g(x) = -x^2 + 4x - 4$. Aflați ordonatele punctelor de intersecție ale graficelor funcțiilor f și g.

3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3^3 x - \log_3(x^4) = 0$.

4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$, acesta să fie soluție a ecuației $n^3 - 6n^2 + 11n - 6 = 0$.

5. Se consideră triunghiul ABC și punctul M astfel încât $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BM}$. Știind că $\left|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{MC}\right| = 4$, aflați lungimea vectorului $\overrightarrow{BC}$.

6. Determinați numerele reale $x \in [0, \pi]$, pentru care $\cos 2x = 1 - \sin^2 x$.

SUBIECTUL al II-lea

1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} x & 1 & x \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, unde $x \in \mathbb{R}$.

   (a) Aflați numerele reale a pentru care $\det A(a) = 0$.

   (b) Determinați numerele reale x astfel încât produsul minorilor corespunzători elementelor de pe diagonala principală a matricei $A(x)$ să fie egal cu produsul minorilor corespunzători elementelor de pe diagonala secundară a acestei matrice.

   (c) Rezolvaţi în $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ecuația $A^{-1}(0) \cdot X - A^t(2) = \frac{1}{3}A^*(0)$, unde matricele B^{-1}, B^t și B^* reprezintă inversa, transpusa și respectiv adjuncta matricei B.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă

$$x * y = \frac{1}{4}xy - (x + y) + 8.$$

   (a) Demonstrați că $x * y = \frac{1}{4}(x - 4)(y - 4) + 4$, pentru orice numere reale x și y.

   (b) Arătați că mulțimea $M = \mathbb{R} - \{4\}$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea de compoziție „$*$”.

   (c) Rezolvați în mulțimea $M = \mathbb{R} - \{4\}$ ecuația $\underbrace{x * x * \ldots * x}_{\text{de 2019 ori } x} = x$.

SUBIECTUL al III-lea

1. Se consideră funcția $f : (0; +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln \dfrac{e^x}{e^x - 1}$.

   (a) Determinați ecuația asimptotei verticale la graficul funcției f.

   (b) Arătați că $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x^3 - 1} = -\dfrac{1}{3(e - 1)}$.

   (c) Arătați că funcția f este convexă.

2. Se consideră funcția $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x(x+1)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

   (a) Arătați că $\int_0^1 f_1(x)\,dx = \dfrac{5}{6}$.

   (b) Calculați $\int_1^2 \dfrac{1}{f_2(x)}dx$.

   (c) Aflați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g : [0,1] \to \mathbb{R},\ g(x) = f_n(x)$.

Testul 3

SUBIECTUL I

1. Să se determine numerele reale a și b, știind că $a^2 + bi = \dfrac{4}{1-i}$.

2. Aflați $m \in \mathbb{R}$ știind că graficul funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - mx + m + 1$ este tangent dreptei $y = x$.

3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $2^x + 4^x - 2 \cdot 8^x = 0$.

4. Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr din mulțimea $\{50, 51, 52, \ldots, 100\}$, acesta să aibă exact trei divizori naturali.

5. În sistemul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,1)$ și $B(-5,-3)$. Calculați ecuația mediatoarei segmentului $[AB]$.

6. Rezolvați ecuația $\sin(\pi + x) + \cos(\pi - x) = 1,\ x \in [0, 2\pi]$.

SUBIECTUL al II-lea

1. În sistemul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,m),\ B(-1,m-1)$, $C(m-2,0)$, unde $m \in \mathbb{R}$.

   (a) Determinați $m \in \mathbb{R}$, pentru care punctele $A,\ B,\ C$ sunt coliniare.

   (b) Pentru $m = 1$, scrieți ecuația dreptei AB.

   (c) Determinați $m \in \mathbb{R}$, pentru care aria triunghiului ABC este egală cu 3.

2. Considerăm inelul $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$.

   (a) Calculați suma pătratelor elementelor inversabile ale inelului.

   (b) Rezolvați sistemul $\begin{cases} \widehat{3}x + \widehat{3}y = \widehat{1} \\ x + \widehat{2}y = \widehat{4} \end{cases}$, $x, y \in \mathbb{Z}_5$.

   (c) Aflați $x_0^{2019} + y_0^{2019}$, unde (x_0, y_0) verifică sistemul de la punctul b).

SUBIECTUL al III-lea

1. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x\sqrt{x} - \dfrac{3}{2}\ln x$.

   (a) Arătați că $f'(4) = \dfrac{21}{8}$.

   (b) Determinați ecuația asimptotei verticale la graficul funcției f.

   (c) Arătați că $e^3 + \ln 27 < 30$.

2. Se consideră funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{2e^x}{e^x + x^2 + x + 1}$ și $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 2}{e^x + x^2 + x + 1}$.

   (a) Arătați că $\int_0^1 \left(e^x + x^2 + x + 1\right) \cdot g(x)\, dx = \dfrac{23}{6}$.

   (b) Calculați $\int_0^1 \left(e^x + x^2 + x + 1\right)^2 \cdot f(x) \cdot g(x)\, dx$.

   (c) Aflați aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției $h : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $h(x) = f(x) + g(x)$, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = 1$.

Teste pentru examenul de Bacalaureat, specializarea matematică-informatică

Costel BĂLCĂU[1]

Testul 1

SUBIECTUL I

1. Fie numerele $a = \log_3 12$ și $x = \log_6 24$. Exprimați x în funcție de a.

2. Știind că z_1 și z_2 sunt rădăcinile complexe ale ecuației $4z^2 + 46z + 625 = 0$, calculați $|z_1| + |z_2| - |z_1 + z_2|$.

3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\left[\dfrac{2x+5}{3}\right] = \dfrac{4x-1}{3}$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a.

4. Determinați numărul termenilor iraționali ai dezvoltării $\left(\dfrac{\sqrt[3]{4}}{3} - \dfrac{2}{\sqrt[5]{9}}\right)^{2018}$.

5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,-1)$, $B(2,3)$, $C(-1,-5)$ și $D(5,1)$. Fie d_1 dreapta care trece prin punctul C și este perpendiculară pe dreapta AB, iar d_2 dreapta care trece prin punctul D și este perpendiculară pe dreapta d_1. Determinați coordonatele punctului de intersecție dintre dreptele d_1 și d_2.

6. Calculați $\arcsin\left(\sin\dfrac{2018\pi}{5}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea

1. Se consideră permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 5 & 1 & 9 & 7 & 3 & 2 & 8 & 4 \end{pmatrix} \in S_9$.

   a) Calculați σ^{-1}.

[1] Conf. univ. dr., Universitatea din Pitești, cbalcau@yahoo.com

b) Demonstrați că ecuația $x^{100} = \sigma$ nu are soluții în grupul $(S_9, \cdot)$.

c) Determinați cardinalul mulțimii $\left\{n \in \mathbb{N}^* \mid n < 2018,\ \sigma^n = \sigma^{2018}\right\}$.

2. Se consideră polinomul $f = X^3 + 4X - 8$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$, și fie expresia $E = \dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_3} + \dfrac{x_3}{x_1}$.

a) Demonstrați că exact una dintre rădăcinile $x_1,\ x_2,\ x_3$ este reală.

b) Demonstrați că $E + \overline{E} = -3$, unde $\overline{E}$ reprezintă conjugatul lui E.

c) Demonstrați că $E^2 + 3E + 10 = 0$.

SUBIECTUL al III-lea

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty),\ f(x) = \dfrac{x^2+1}{e^x}$.

a) Demonstrați că funcția f este inversabilă.

b) Calculați $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f^{-1}(x)}{\ln x}$.

c) Studiați convergența șirului $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ definit prin $a_n = f^{(n)}(0)$, unde $f^{(n)}$ reprezintă derivata de ordinul n a funcției f.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x^3 + 2x}{x^2 + 1}$.

a) Calculați $\displaystyle\int_{-2018}^{2018} f(x)\, dx$.

b) Studiați monotonia funcției $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \displaystyle\int_{-1}^{x^2-1} f(t)\, dt$.

c) Demonstrați că funcția f este inversabilă și calculați $\displaystyle\int_0^{3/2} f^{-1}(x)\, dx$.

Testul 2

SUBIECTUL I

1. Calculați suma $3 + 33 + 333 + \ldots + \underbrace{33\ldots3}_{2018 \text{ cifre}}$.

2. Fie x_1 și x_2 soluțiile ecuației $x^2 + (2m+1)x + m + 4 = 0$, unde m este un parametru real. Determinați m pentru care $x_1 = 2x_2$.

3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $(2+\sqrt{3})^x + (2-\sqrt{3})^x = 14$.

4. Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să fie divizibil cu 18, dar să nu fie divizibil cu 12.

5. Fie hexagonul regulat $ABCDEF$. Calculați $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}\right|$, știind că $AD = 6$.

6. Se consideră triunghiul ABC, cu $AB = 26$, $BC = 28$ și $CA = 30$. Calculați lungimile înălțimii, medianei și bisectoarei duse din vârful A.

SUBIECTUL al II-lea

1. Se consideră mulțimea $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ \hat{1} & \hat{2} \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{Z}_4 \right\} \subseteq \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_4)$.

   a) Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare o matrice din mulțimea M, aceasta să fie inversabilă.

   b) Demonstrați că dacă $X \in M$ astfel încât $X^2 \in M$, atunci $X^2 = X$.

   c) Câte soluții $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_4)$ are ecuația $\begin{pmatrix} \hat{3} & \hat{2} \\ \hat{1} & \hat{2} \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} \hat{3} & \hat{2} \\ \hat{1} & \hat{2} \end{pmatrix}$?

2. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție

$$x \circ y = 2ax + 2ay - axy - 1,\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}, \text{unde } a \in \mathbb{R}.$$

   a) Determinați $a \in \mathbb{R}$ pentru care legea „$\circ$" are element neutru.

   b) Pentru $a = \frac{3}{4}$, demonstrați că $(\mathbb{R} \setminus \{2\}, \circ)$ este un grup abelian izomorf cu grupul $(\mathbb{R}^*, \cdot)$.

   c) Pentru $a = \frac{3}{4}$, calculați $\underbrace{4 \circ 4 \circ \ldots \circ 4}_{\text{de 2018 ori 4}}$.

SUBIECTUL al III-lea

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x \ln|x|, & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$.

   a) Determinați domeniul de derivabilitate al funcției f.

   b) Determinați punctele de extrem local și punctele de inflexiune ale funcției f.

   c) Determinați $m \in \mathbb{R}$ pentru care ecuația $f(x) = m$ are exact două soluții reale.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} x\ln|x|, & \text{dacă } x\neq 0\\ a, & \text{dacă } x=0\end{cases}$, unde $a\in\mathbb{R}$.

   a) Determinați $a\in\mathbb{R}$ pentru care funcția f are primitive și, în acest caz, calculați primitiva F a funcției f pentru care $F(0)=0$.

   b) Determinați $a\in\mathbb{R}$ pentru care funcția f este integrabilă pe intervalul $[-1,e]$ și, în acest caz, calculați $\displaystyle\int_{-1}^{e} f(x)\,dx$.

   c) Pentru $a=\dfrac{\pi}{2}$, calculați $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin f(x)\,dx$.

Testul 3

SUBIECTUL I

1. Demonstrați că șirul $(a_n)_{n\geq 0}$ definit prin $a_n=\dfrac{2n+1}{3n+2}$ este monoton și mărginit.

2. Determinați distanța dintre axele de simetrie ale graficelor funcțiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=-x^2+4x-3$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=2x^2+6x-8$.

3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\arcsin x+\arccos\dfrac{1}{3}=\pi$.

4. Fie M mulțimea funcțiilor definite pe $A=\{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$ cu valori în $B=\{-2,-1,0,1,2,3\}$. Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare o funcție din mulțimea M, aceasta să nu fie nici pară, nici impară.

5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(5,5)$, $B(-2,-2)$ și $C(5,-3)$. Determinați coordonatele centrului cercului circumscris triunghiului ABC.

6. Ordonați crescător numerele $\sin 1,\ \sin 2,\ \sin 3$.

SUBIECTUL al II-lea

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}\sqrt{3} & 3\\ -3 & \sqrt{3}\end{pmatrix}$.

   a) Determinați $r>0$ și $t\in[0,2\pi)$ astfel încât $A=r\begin{pmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{pmatrix}$.

   b) Calculați A^{2018}.

c) Demonstrați că $6A^{-1} \neq \sqrt{3} \cdot A^n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Se consideră $a, b \in \mathbb{R}$ și polinomul $f = aX^{40} + bX^{20} + 10$.

   a) Calculați restul împărțirii lui f la $(X-1)(X-2)$, știind că restul împărțirii lui f la $X-1$ este egal cu 2, iar restul împărțirii lui f la $X-2$ este egal cu 3.

   b) Determinați a și b, știind că f este divizibil cu $X^2 - 2X + 1$.

   c) Pentru valorile lui a și b determinate la punctul b), calculați suma coeficienților polinomului g, unde g este câtul împărțirii polinomului f la $X^2 - 2X + 1$.

SUBIECTUL al III-lea

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt[3]{x - \sin x}$.

   a) Determinați punctele de intersecție a graficului funcției f cu axele de coordonate.

   b) Demonstrați că există o infinitate de puncte situate pe graficul funcției f în care tangenta la graficul funcției f este paralelă cu axa Ox.

   c) Demonstrați că funcția f este inversabilă și determinați domeniile de derivabilitate ale funcțiilor f și f^{-1}.

2. Se consideră numărul real a, $a > 0$ și șirurile $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ și $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definite prin $I_n = \int\limits_0^3 \frac{1}{(x^2+16)^n}\, dx,\ J_n = a^n I_n$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

   a) Calculați I_0, I_1 și I_2.

   b) Demonstrați că $32nI_{n+1} = (2n-1)I_n + \frac{3}{5^{2n}}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

   c) Studiați convergența șirului $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$, în funcție de a.

PROBLEME PENTRU CONCURSURI

Rezolvarea problemelor din numărul anterior

Clasa a V-a

MGO 1. *Se consideră un șir format din* 100 *de cartonașe albe și* 100 *de cartonașe roșii. Să se arate că, pentru orice ordine a cartonașelor, există* 100 *de cartonașe consecutive care sunt jumătate albe și jumătate roșii.*

Stelian Corneliu Andronescu și *Costel Bălcău*, Pitești

Soluție. Pentru orice subșir de 100 de cartonașe consecutive, notăm cu a numărul de cartonașe albe și cu r numărul de cartonașe roșii. Evident, $a + r = 100$. Pentru subşirul format din primele 100 de cartonașe avem $100+a-r = 100+a_1-r_1 = 2k$, unde $k \in \{0, 1, 2, \dots, 100\}$, iar pentru subşirul format din ultimele 100 de cartonașe avem $100 + a - r = 200 - 2k$ (deoarece rămân $a' = 100 - a_1$ cartonașe albe și $r' = 100 - r_1$ cartonașe roșii). Cum la fiecare deplasare a subșirului valoarea $100 + a - r$ crește sau scade cu 2 sau rămâne constantă, rezultă că aceasta devine la un moment dat egală cu 100, deci în acel moment vom avea $a = r$.

Remarcăm că putem lucra direct cu numere negative înlocuind expresia $100 + a - r$ cu diferența $a - r$, care are inițial valoarea $a_1 - r_1 = 2m$, crește sau scade cu 2 sau rămâne constantă, iar la final are valoarea $r_1 - a_1 = -2m$, deci devine la un moment dat egală cu 0.

MGO 2. *Arătați că numerele* $N(k,n) = \underbrace{444\dots4}_{k-cifre}\underbrace{777\dots7}_{n-cifre}\underbrace{333\dots3}_{k-cifre}$ *sunt numere naturale compuse, unde* $k, n \in \mathbb{N}^*$.

Costel Anghel, Slatina

Soluție. Putem rescrie $N(k,n) = \underbrace{444\dots4}_{k\text{ cifre}}\underbrace{444\dots4}_{n\text{ cifre}}\underbrace{000\dots0}_{k\text{ cifre}} + \underbrace{333\dots3}_{n\text{ cifre}}\underbrace{333\dots3}_{k\text{ cifre}} = 4 \cdot \underbrace{111\dots1}_{k+n\text{ cifre}} \cdot 10^k + 3 \cdot \underbrace{111\dots1}_{k+n\text{ cifre}} = \underbrace{111\dots1}_{k+n\text{ cifre}}(4 \cdot 10^k + 3)$.

MGO 3. *Arătați că există* 2017 *numere naturale consecutive astfel încât niciunul dintre ele nu este număr prim. Generalizare.*

Florea Badea, Scornicești

Soluție. Fie $N = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2018$ (produs care se notează cu 2018! și se numește 2018-*factorial*). Atunci numerele $N+2, N+3, \ldots, N+2018$ sunt compuse, deoarece se divid cu $2, 3, \ldots,$ respectiv 2018.

Generalizarea este evidentă: pentru orice număr $n \in \mathbb{N}^*$, există n numere naturale consecutive astfel încât niciunul dintre ele nu este număr prim.

MGO 4. *a) Arătați că* $2^{2400} + 3^{1200} > 7^{800} + 2$.

b) Arătați că numărul $A = 2^{2400} + 3^{1200} - 7^{800} - 2$ *este multiplu de* 14.

Daniela Nadia Taclit, Slatina

Soluție. a) $2^{2400} = 8^{800} > 7^{800}$, iar $3^{1200} > 2$.

b) Evident, A este număr par. Avem și $A = 8^{800} + 729^{200} - 7^{800} - 2 = (7+1)^{800} + (7 \cdot 104 + 1)^{200} - 7^{800} - 2 = \mathcal{M}7 + 1 + \mathcal{M}7 + 1 + \mathcal{M}7 - 2 = \mathcal{M}7$.

MGO 5. *Arătați că numărul* $n = 17^m$*, unde* m *este un număr natural nenul, se poate scrie ca o sumă de două pătrate perfecte.*

***

Soluție. Dacă $m = 2k+1$, atunci $n = 17^{2k} \cdot 17 = 17^{2k}(4^2+1^2) = \left(17^k \cdot 4\right)^2 + \left(17^k\right)^2$. Dacă $m = 2k$, atunci $n = 17^{2k-2} \cdot 17^2 = 17^{2k-2}(15^2 + 8^2) = \left(17^{k-1} \cdot 15\right)^2 + \left(17^{k-1} \cdot 8\right)^2$.

Clasa a VI-a

MGO 6. *Se consideră numărul* $a = 123\ldots9101112\ldots2017$.

a) Câte cifre are numărul a*?*

b) Din numărul a *se elimină* 6300 *de cifre astfel încât numărul rămas să fie cât mai mare posibil. Determinați numărul rămas.*

Stelian Corneliu Andronescu și *Costel Bălcău*, Pitești

Soluție. a) Numărul de cifre ale lui a este $9 + 2 \cdot 90 + 3 \cdot 900 + 4 \cdot 1018 = 6961$.

b) Numărul de cifre egale cu 9 ale lui a, adică din șirul $1, 2, 3, \ldots, 2017$, este 201 (unități) $+20 \cdot 10$ (sute) $+ 2 \cdot 100$ (mii) $= 601$. Astfel numărul de cifre diferite de 9 din a este $6961 - 601 = 6360$, deci nu le putem elimina pe toate. După ultima cifră de 9 din a avem $20102011\ldots2017$, adică 32 de cifre diferite de 9, deci înaintea sa avem $6360 - 32 = 6328$ de cifre diferite de 9, deci nu le putem elimina pe toate. După penultima cifră de 9 din a avem $20002001\ldots2017$, adică 71 de cifre diferite de 9, deci înaintea sa avem $6360 - 71 = 6289$ de cifre diferite de 9, deci le eliminăm pe toate, rămân 600 de cifre 9 și mai avem de eliminat 11 cifre din porțiunea $b = 20002001\ldots2017$. Cea mai mare cifră din primele 12 ale lui b este 2, aceasta rămâne și mai avem de eliminat 11 cifre din porțiunea $c = 0002001\ldots2017$. Cea mai mare cifră din primele 12 ale lui c este 2, aceasta rămâne, eliminăm cifrele 000 din fața ei și mai avem de eliminat 8 cifre din porțiunea $d = 0012002\ldots2017$. Cea mai mare cifră din primele 9 ale lui d este 2, aceasta rămâne, eliminăm cifrele 001 din fața ei și mai avem de eliminat 5 cifre din porțiunea $e = 0022003\ldots2017$. Continuând acest procedeu obținem că numărul maxim cerut este $\underbrace{99\ldots9}_{600 \text{ cifre}}2222320042005\ldots2017$.

MGO 7. *Să se arate că numărul* $N = 12345\underbrace{00\ldots0}_{2017 \text{ ori}}6789$ *nu este divizibil cu* 7. *Generalizare. (Enunț modificat.)*

Costel Anghel, Slatina

Soluție. Avem $12345 = 7\cdot1763+4$ și $67890 = 7\cdot9698+4$, deci $10N = 12341\underbrace{00\ldots0}_{2017 \text{ ori}}67886 + 4\underbrace{00\ldots0}_{2021 \text{ ori}}4$. Cum $7|12341$ și $7|67886$, rămâne de demonstrat că $4\underbrace{00\ldots0}_{2021 \text{ ori}}4$ nu se divide cu 7. Într-adevăr, avem $4\underbrace{00\ldots0}_{2021 \text{ ori}}4 = 4\left(10^{2022}+1\right) = 4\left(1000^{674}+1\right) = 4\left[(\mathcal{M}7-1)^{674}+1\right] = 4\left(\mathcal{M}7+1+1\right) = \mathcal{M}7+1$.

Analog se obține următoarea generalizare: numărul $N = 12345\underbrace{00\ldots0}_{n \text{ ori}}6789$ este divizibil cu 7 dacă și numai dacă $n = 6k+4$, $k \in \mathbb{N}$.

MGO 8. *Determinați câte numere naturale se pot scrie, în baza* 10, *sub forma*

$$\overline{x0y}+\overline{y0x}+\overline{x0x}+\overline{x7}.$$

Liviu Chirimbu, București

Soluție. Fie $a = \overline{x0y}+\overline{y0x}+\overline{x0x}+\overline{x7} = 212x+101y+7$, $x,y \in \{1,2,\ldots,9\}$. Cum x și y iau fiecare câte 9 valori, rezultă că există cel mult 81 de numere a de forma dată. Arătăm că fiecare astfel de număr a se poate scrie în mod unic sub forma dată. Într-adevăr, dacă $a = 212x+101y+7 = 212z+101t+7$, cu $x,y,z,t \in \{1,2,\ldots,9\}$, atunci $212(x-z) = 101(t-y)$. Cum 212 și 101 sunt prime între ele, rezultă că $101|x-z$. Dar $-8 \le x-z \le 8$, deci $x-z=0$ și astfel $x=z$ și $y=t$. În concluzie, există 81 de numere naturale de forma dată.

MGO 9. *Fie* $M \in [AB]$ *astfel încât* $\dfrac{AM}{MB} = k$. *Arătați că oricare ar fi punctul* $N \in [AB]$ *avem* $(k+1)MN = |AN-kBN|$.

George Mihai, Slatina

Soluție. Dacă $N \in [AM]$, atunci $|AN-kBN| = |AM-MN-k(MB+MN)| = |kMB-MN-k(MB+MN)| = |-(k+1)MN| = (k+1)MN$.

Dacă $N \in (MB]$, atunci $|AN-kBN| = |AM+MN-k(MB-MN)| = |kMB+MN-k(MB-MN)| = |(k+1)MN| = (k+1)MN$.

MGO 10. *Fie ABC un triunghi echilateral. Arătați că în planul acestui triunghi există un unic punct S astfel încât $\sphericalangle ASB \equiv \sphericalangle BSC \equiv \sphericalangle CSA$.*

* * *

Soluție. Fie S un punct din plan astfel încât $\sphericalangle ASB \equiv \sphericalangle BSC \equiv \sphericalangle CSA$. Rezultă că $\sphericalangle ASB$, $\sphericalangle BSC$ și $\sphericalangle CSA$ sunt unghiuri în jurul punctului S, deci S este situat în interiorul triunghiului ABC și $m(\sphericalangle ASB) = m(\sphericalangle BSC) = m(\sphericalangle CSA) = 120°$. Notând $m(\sphericalangle SAB) = x$, deducem că $m(\sphericalangle SBA) = 60° - x$, $m(\sphericalangle SBC) = x$, $m(\sphericalangle SCB) = 60° - x$, $m(\sphericalangle SCA) = x$, $m(\sphericalangle SAC) = 60° - x$. Rezultă că $\triangle ASB \equiv \triangle BSC \equiv \triangle CSA$ (cazul U.L.U.), deci $[SA] \equiv [SB] \equiv [SC]$, adică S este centrul cercului circumscris triunghiului ABC. Reciproc, triunghiul ABC fiind echilateral, acest centru îndeplinește congruențele din enunț.

Menționăm că proprietatea din enunț este valabilă în orice triunghi ABC cu măsurile unghiurilor strict mai mici decât $120°$, punctul S numindu-se *punctul Torricelli-Fermat* (https://en.wikipedia.org/wiki/Fermat_point) al triunghiului ABC. De asemenea, el este unicul punct din plan cu proprietatea că suma $SA+SB+SC$ este minimă, fiind astfel numit și *punctul Steiner* pentru punctele A, B și C (https://en.wikipedia.org/wiki/Steiner_tree_problem). Evident, acest punct este centrul cercului circumscris doar în triunghiul echilateral.

Clasa a VII-a

MGO 11. *Se consideră suma $S = 1^2 \cdot 2^3 \cdot 3^2 + 2^2 \cdot 3^3 \cdot 4^2 + \ldots + 2016^2 \cdot 2017^3 \cdot 2018^2$. Să se arate că S se divide cu 72, iar numărul $\frac{S}{72}$ este un pătrat perfect.*

Stelian Corneliu Andronescu și *Costel Bălcău*, Pitești

Soluție. Deoarece $(n+2)^2 - (n-2)^2 = 8n$, avem $8(n-1)^2n^3(n+1)^2 = (n-1)^2n^2(n+1)^2(n+2)^2 - (n-2)^2(n-1)^2n^2(n+1)^2$. Însumând obținem $8S = 2016^2 \cdot 2017^2 \cdot 2018^2 \cdot 2019^2$, deci $\frac{S}{72} = \left(\frac{2016 \cdot 2017 \cdot 2018 \cdot 2019}{3 \cdot 8}\right)^2$.

MGO 12. *Se consideră un pătrat $ABCD$ și punctele $M \in [AB]$ și $N \in [AD]$ astfel încât $m(\sphericalangle MCN) = 45°$. Să se arate că:*

a) $MN = MB + ND$.

b) $\left(1 + \frac{MB}{AB}\right)\left(1 + \frac{ND}{AD}\right) = 2$.

Costel Anghel, Slatina

Soluție. a) Fie $P \in [MN]$ a.î. $m(\sphericalangle MCP) = m(\sphericalangle MCB)$, deci și $m(\sphericalangle NCP) = m(\sphericalangle NCD)$. Fie $MP_1 \perp CP$ și $NP_2 \perp CP$, $P_1, P_2 \in CP$. Avem $\triangle CP_1M \equiv \triangle CBM$ și $\triangle CP_2N \equiv \triangle CD$N (cazul I.U.), deci $CP_1 = CB = CD = CP_2$, de unde rezultă că $P_1 = P_2 = P$. Folosind congruențele anterioare, deducem că $MN = MP + NP = MP_1 + NP_2 = MB + ND$.

b) Notând $AB = l$, $MB = x$ și $ND = y$, conform punctului a) avem $MN = x + y$. Aplicând *Teorema lui Pitagora* în $\triangle MAN$ avem $(x+y)^2 = (l-x)^2 + (l-y)^2$, de unde $lx + ly + xy = l^2$, adică $(l + x)(l + y) = 2l^2$. Împărțind prin l^2 obținem egalitatea din enunț.

MGO 13. *Să se rezolve în mulțimea numerelor întregi ecuația*

$$3x^2 - 22xy + 24y^2 = 17.$$

Mihai Florea Dumitrescu, Potcoava

Soluție. Avem $3x^2 - 22xy + 24y^2 = 3x^2 - 18xy - 4xy + 24y^2 = 3x(x - 6y) - 4y(x - 6y) = (x - 6y)(3x - 4y)$, deci ecuația devine $(x - 6y)(3x - 4y) = 17$. Obținem $(x-6y, 3x-4y) \in \{(1, 17), (17, 1), (-1, -17), (-17, -1)\}$, de unde $(x, y) \in \{(7, 1), (-7, -1)\}$.

MGO 14. *Să se determine numărul elementelor mulțimii*

$$A = \left\{ \frac{n^2 - n + 4}{n^2 + 1} \,\middle|\, n \in \mathbb{N},\ n \leq 2017 \right\}.$$

Valentin Rădulescu, Scornicești

Soluție. Determinăm perechile de numere naturale (m, n), $0 \leq m < n \leq 2017$, pentru care $\dfrac{m^2 - m + 4}{m^2 + 1} = \dfrac{n^2 - n + 4}{n^2 + 1}$. Egalitatea devine, succesiv: $\dfrac{m - 3}{m^2 + 1} = \dfrac{n - 3}{n^2 + 1}$; $mn^2 + m - 3n^2 = m^2n + n - 3m^2$; $(n - m)(mn - 3m - 3n - 1) = 0$; $(n - m)[(m - 3)(n - 3) - 10] = 0$, cu soluțiile $(m, n) \in \{(4, 13), (5, 8)\}$. Deci card $(A) = 2018 - 2 = 2016$.

MGO 15. *Fie M un punct în interiorul triunghiului echilateral ABC. Dacă P, Q și R sunt picioarele perpendicularelor duse din M pe $[AB]$, $[BC]$ respectiv $[AC]$, arătați că:*

a) $AP^2 + BQ^2 + CR^2 = BP^2 + CQ^2 + AR^2$.

b) $AP \cdot BQ + AP \cdot CR + BQ \cdot CR = BP \cdot CQ + BP \cdot AR + CQ \cdot AR$.

***

Soluție. a) Aplicând *Teorema lui Pitagora* avem $AP^2 + BQ^2 + CR^2 = MA^2 + MB^2 + MC^2 - MP^2 - MQ^2 - MR^2 = BP^2 + CQ^2 + AR^2$.

b) Folosind punctul a) obținem $0 = AP^2 - BP^2 + BQ^2 - CQ^2 + CR^2 - AR^2 = AB(AP - BP + BQ - CQ + CR - AR)$, deci $AP + BQ + CR = BP + CQ + AR$. Prin ridicare la pătrat și utilizând punctul a), se obține egalitatea din enunț.

Clasa a VIII-a

MGO 16. *a) Determinați cel mai mare număr întreg n cu proprietatea că expresia $a^2b^2c^2(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2)$ se divide cu n pentru orice numere întregi a, b, c.*

b) Aceeași cerință pentru expresia $a^3b^3c^3(a^3-b^3)(b^3-c^3)(c^3-a^3)$.

Costel Anghel, Slatina și *Costel Bălcău*, Pitești

Soluție. a) Notând cu $E(a,b,c)$ expresia din enunț, avem $E(1,2,3) = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5 = 4320$. Pentru a demonstra că $n = 4320$ este numărul cerut, este suficient să arătăm că $E(a,b,c)$ se divide cu 4320, $\forall a,b,c \in \mathbb{Z}$. Evident, $a^2, b^2, c^2 \in \{\mathcal{M}4, \mathcal{M}8+1\}$. Dacă $a^2, b^2 \in \{\mathcal{M}4\}$ (sau cazurile analoage), atunci $a^2b^2(a^2-b^2) = \mathcal{M}32$; dacă $a^2 \in \{\mathcal{M}4\}$ și $b^2, c^2 \in \{\mathcal{M}8+1\}$ (sau cazurile analoage), atunci $a^2(b^2-c^2) = \mathcal{M}32$; dacă $a^2, b^2, c^2 \in \{\mathcal{M}8+1\}$, atunci $(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2) = \mathcal{M}32$; deci $E(a,b,c)$ se divide cu 32, $\forall a,b,c \in \mathbb{Z}$. Similar, deoarece $a^2, b^2, c^2 \in \{\mathcal{M}9, \mathcal{M}3+1\}$ se deduce că $E(a,b,c)$ se divide cu 27, iar deoarece $a^2, b^2, c^2 \in \{\mathcal{M}5, \mathcal{M}5 \pm 1\}$ se deduce că $E(a,b,c)$ se divide și cu 5.

b) Notând cu $F(a,b,c)$ expresia din enunț, avem $F(1,2,3) = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 19$, iar $F(1,2,4) = 2^{12} \cdot 3^2 \cdot 7^3$. Cum cel mai mare divizor comun al acestor două numere este $2^4 \cdot 3^2 \cdot 7 = 1008$, pentru a demonstra că $n = 1008$ este numărul cerut, este suficient să arătăm că $E(a,b,c)$ se divide cu 1008, adică cu 16, cu 9 și cu 7, $\forall a,b,c \in \mathbb{Z}$. Aceste divizibilități se obțin similar celor arătate la punctul a), utilizând acum relațiile $a^3, b^3, c^3 \in \{\mathcal{M}8, \mathcal{M}4 \pm 1\}$, $a^3, b^3, c^3 \in \{\mathcal{M}9, \mathcal{M}9 \pm 1\}$, respectiv $a^3, b^3, c^3 \in \{\mathcal{M}7, \mathcal{M}7 \pm 1\}$.

MGO 17. *Într-o piramidă triunghiulară regulată distanța de la centrul bazei la una din fețele laterale este egală cu 10 dm, iar măsura unghiului diedru dintre bază și o față laterală este egală cu $30°$. Calculați:*

a) Aria laterală și volumul piramidei;

b) Distanța de la centrul bazei la ortocentrul unei fețe laterale.

Florea Badea, Scornicești

Soluție. a) Fie $VABC$ piramida dată, O centrul bazei, M mijlocul lui $[AB]$ și $OP \perp VM$, $P \in (VM)$. Avem $OP = 1$ m și $m(\sphericalangle VMO) = 30°$. Din $\triangle OPM$ rezultă că $PM = \sqrt{3}$ m și $OM = 2$ m, deci $CM = 6$ m și $AB = 4\sqrt{3}$ m, iar din $\triangle VOM$ rezultă că $VO = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ m și $VM = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ m. Se obține că $\mathcal{A}_l = 24$ m^2 și $\mathcal{V} = 8$ m^3.

b) Fie H ortocentrul $\triangle VAB$. Deoarece $VM < VA = VB$, rezultă că $m(\sphericalangle AVB) > 90°$ și astfel $V \in (HM)$. Folosind asemănarea dintre $\triangle HMB$ și $\triangle AMV$ (cazul U.U.), se obține că $HM = 3\sqrt{3}$ m, deci $HP = HM - PM = 2\sqrt{3}$ m. Aplicând *Teorema lui Pitagora* în $\triangle OPH$ rezultă că $OH = \sqrt{OP^2 + HP^2} = \sqrt{13}$ m.

MGO 18. *Determinați* $x \in \mathbb{R}^*$ *astfel încât* $\min\left\{|x|, \left|\frac{1}{x}\right|\right\} > \left|x - \frac{1}{x}\right|$.

Aurel Chiriță, Slatina și *Lucian Tuțescu*, Craiova

Soluție. $x \in \mathbb{R}^*$ verifică inegalitatea dată dacă și numai dacă $|x| > \left|x - \frac{1}{x}\right|$ și $\left|\frac{1}{x}\right| > \left|x - \frac{1}{x}\right|$. Dar $|x| > \left|x - \frac{1}{x}\right| \Leftrightarrow x^2 > \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 \Leftrightarrow x^2 > x^2 - 2 + \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow \frac{1-2x^2}{x^2} < 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right) = A$, iar $\left|\frac{1}{x}\right| > \left|x - \frac{1}{x}\right| \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} > \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} > x^2 - 2 + \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow x^2 - 2 < 0,\ x \neq 0 \Leftrightarrow x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \setminus \{0\} = B$. Soluția problemei este $x \in A \cap B$, adică $x \in \left(-\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right)$.

MGO 19. *Se consideră cubul* $ABCDA'B'C'D'$ *și punctele* $M \in (A'D')$, $N \in (D'C')$ *și* $P \in (BC)$ *astfel încât* $A'M = MD'$, $ND' = 2NC'$ *și* $PC = 3PB$. *Știind că* $AB = a$, *determinați:*

a) Distanța de la punctul D' *la planul* (MNP)*;*

b) Sinusul unghiului dintre planele (ABC) *și* (MNP).

Mihai Florea Dumitrescu, Potcoava

Soluție. a) Fie $PP' \| BB'$, $P' \in (B'C')$ și $P'Q \perp MN$, $Q \in MN$. Avem $\mathcal{A}_{MNP'} = \mathcal{A}_{A'B'C'D'} - \mathcal{A}_{MD'N} - \mathcal{A}_{NC'P'} - \mathcal{A}_{A'MP'B'} = \frac{a^2}{3}$, iar $MN = \sqrt{D'M^2 + D'N^2} = \frac{5a}{6}$, deci $P'Q = \frac{2 \cdot \mathcal{A}_{MNP'}}{MN} = \frac{4a}{5}$. Rezultă că $PQ = \sqrt{PP'^2 + P'Q^2} = \frac{a\sqrt{41}}{5}$. Avem $\mathcal{V}_{D'MNP} = \frac{\mathcal{A}_{MNP} \cdot d(D', (MNP))}{3} = \frac{\mathcal{A}_{MD'N} \cdot PP'}{3}$, deci $d(D', (MNP)) = \frac{\mathcal{A}_{MD'N} \cdot PP'}{\mathcal{A}_{MNP}} = \frac{D'M \cdot D'N \cdot PP'}{MN \cdot PQ} = \frac{2a\sqrt{41}}{41}$.

b) $\sin\left(\sphericalangle\left((ABC), (MNP)\right)\right) = \sin\left(\sphericalangle\left((A'B'C'), (MNP)\right)\right) = \sin\left(\sphericalangle P'QP\right) = \frac{PP'}{PQ} = \frac{5\sqrt{41}}{41}$.

MGO 20. *Dacă* $a, b, c > 0$ *și* $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, *demonstrați că are loc inegalitatea*

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} \leq \frac{1}{2abc}.$$

Florin Stănescu, Găești

Soluție. Utilizând inegalități uzuale avem $\frac{2ab}{a+b} \cdot c + \frac{2ac}{a+c} \cdot b + \frac{2bc}{b+c} \cdot a \leq \frac{a+b}{2} \cdot c + \frac{a+c}{2} \cdot b + \frac{b+c}{2} \cdot a = ab + ac + bc \leq a^2 + b^2 + c^2 = 1$, de unde, împărțind prin $2abc$, obținem inegalitatea din enunț.

Clasa a IX-a

MGO 21. *Rezolvați în* $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ *ecuația* $(x^2-3x+3)(y^2+5y+7)=3(x-2)(y+3)$.

Stelian Corneliu Andronescu și *Costel Bălcău*, Pitești

Soluția 1. Cum $x=2$ nu convine, ecuația poate fi rescrisă sub forma $f(x)=g(y)$, unde $f:\mathbb{R}\setminus\{2\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2-3x+3}{x-2}$, iar $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(y)=\dfrac{3y+9}{y^2+5y+7}$. Avem $\operatorname{Im} f=(-\infty,-1]\cup[3,\infty)$ și $\operatorname{Im} g=[-1,3]$. Rezultă că $f(x)=g(y)=-1$ sau $f(x)=g(y)=3$, deci $(x,y)\in\{(1,-4),(3,-2)\}$.

Soluția 2 (*Leonard Giugiuc*, Drobeta Turnu Severin). Notând $x-2=a$ și $y+3=b$, ecuația este echivalentă cu $(a^2+a+1)(b^2-b+1)=3ab$. Dacă $ab\le 0$, clar nu avem soluții. Cazul 1: $a,b>0$. Obținem echivalenta $\left(a+\dfrac{1}{a}+1\right)\left(b+\dfrac{1}{b}-1\right)=3$. Fie $a+\dfrac{1}{a}=u+2$ și $b+\dfrac{1}{b}=v+2$. Clar, $u,v\ge 0$ și ecuația devine $uv+u+3v=0$, deci $u=v=0$, prin urmare $a=b=1$, de unde $x=3$, $y=-2$. Cazul 2: $a,b<0$. Analog ca în Cazul 1 obținem $a=b=-1$, de unde $x=1$, $y=-4$.

MGO 22. *Arătați că în orice triunghi ascuțitunghic* ABC *are loc inegalitatea*

$$2\,(a+b+c)\sqrt{\cos A\cos B\cos C}\le\sqrt{bc\cos A}+\sqrt{ca\cos B}+\sqrt{ab\cos C}$$

(notațiile fiind cele obișnuite).

Leonard Giugiuc, Drobeta Turnu Severin și *Cristinel Mortici*, Târgoviște

Soluție. Fie $\sqrt{bc\cos A}=x$, $\sqrt{ca\cos B}=y$, $\sqrt{ab\cos C}=z$. Conform *Teoremei cosinusului*, $\sqrt{y^2+z^2}=a$, $\sqrt{z^2+x^2}=b$, $\sqrt{x^2+y^2}=c$, deci $\cos A=\dfrac{x^2}{\sqrt{(z^2+x^2)(x^2+y^2)}}$, $\cos B=\dfrac{y^2}{\sqrt{(x^2+y^2)(y^2+z^2)}}$, $\cos C=\dfrac{z^2}{\sqrt{(y^2+z^2)(z^2+x^2)}}$. Astfel, inegalitatea din enunț este echivalentă cu

$$\frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2)(y^2+z^2)}}+\frac{1}{\sqrt{(y^2+z^2)(z^2+x^2)}}+\frac{1}{\sqrt{(z^2+x^2)(x^2+y^2)}}\le\frac{x+y+z}{2xyz}.$$

Utilizând *Inegalitatea mediilor* avem $\dfrac{1}{\sqrt{(x^2+y^2)(y^2+z^2)}}\le\dfrac{1}{\sqrt{(2xy)(2yz)}}=\dfrac{\sqrt{xz}}{2xyz}\le\dfrac{x+z}{4xyz}$ și, analog, $\dfrac{1}{\sqrt{(y^2+z^2)(z^2+x^2)}}\le\dfrac{y+x}{4xyz}$, $\dfrac{1}{\sqrt{(z^2+x^2)(x^2+y^2)}}\le\dfrac{z+y}{4xyz}$, iar prin adunare obținem inegalitatea dorită.

MGO 23. *Fie $a, b, c, d > 0$ și $e \geq 2$. Demonstrați că*

$$\frac{a}{ea+b}+\frac{b}{eb+c}+\frac{c}{ec+d}+\frac{d}{ed+a}<\frac{e+1}{e}.$$

Daniel Jinga, Pitești

Soluție. Fără a restrânge generalitatea, fixăm $e \geq 2$ și presupunem că $d = \max\{a, b, c, d\}$. Atunci $\frac{c}{ec+d} \leq \frac{c}{ec+a}$ și $\frac{d}{ed+a} < \frac{1}{e}$, deci este suficient să arătăm că $\frac{a}{ea+b}+\frac{b}{eb+c}+\frac{c}{ec+a} \leq 1$, adică $\frac{1}{e+x}+\frac{1}{e+y}+\frac{1}{e+z} \leq 1$, unde $x=\frac{b}{a}$, $y=\frac{c}{b}$, $z=\frac{a}{c}$, $x, y, z > 0$ și $xyz = 1$. Cum $e \geq 2$, este suficient să arătăm că $\frac{1}{2+x}+\frac{1}{2+y}+\frac{1}{2+z} \leq 1$. Efectuând calculele, inegalitatea anterioară devine $xy + xz + yz + xyz \geq 4$. Această inegalitate este adevărată, deoarece $xyz = 1$ și, conform *Inegalității mediilor*, $xy + xz + yz \geq 3$.

MGO 24. *Calculați*

$$\max\left\{abc(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2) \mid a, b, c \in [0, +\infty),\ a+b+c=3\right\}.$$

Florin Stănescu, Găești

Soluție. Fie $a, b, c \geq 0$ a.î. $a + b + c = 3$. Utilizând *Inegalitatea mediilor* avem $abc(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2) = \frac{1}{8} \cdot 2a(1+a^2) \cdot 2b(1+b^2) \cdot 2c(1+c^2) \leq \frac{1}{8}\left(\frac{2a+1+a^2}{2}\right)^2\left(\frac{2b+1+b^2}{2}\right)^2\left(\frac{2c+1+c^2}{2}\right)^2 = \frac{1}{8^3}\left[(1+a)(1+b)(1+c)\right]^4 \leq \frac{1}{8^3}\left[\left(\frac{(1+a+1+b+1+c}{3}\right)^3\right]^4 = \frac{1}{8^3} \cdot 2^{12} = 8$, iar inegalitățile devin egalități dacă și numai dacă $a = b = c = 1$. Deci valoarea maximă cerută este egală cu 8.

MGO 25. *Fie paralelogramul $ABCD$ cu $AB = 4$, $DB = 3$ și $BC = 2$. Fie G centrul de greutate al triunghiului ABD, I centrul cercului înscris în triunghiul DBC, iar P simetricul lui I față de un punct M de pe dreapta BC. Determinați poziția punctului M astfel încât punctele P, I și G să fie coliniare.*

Daniela Nadia Taclit, Slatina

Soluție. Cum I, M, P sunt coliniare, rezultă că P, I, G sunt coliniare dacă și numai dacă M, I, G sunt coliniare. Fie $k = \frac{\overline{CM}}{\overline{CB}}$, deci $\overrightarrow{MC} = -k\overrightarrow{CB}$ și $\overrightarrow{MB} = (1-k)\overrightarrow{CB}$. Obținem că $\overrightarrow{MI} = \frac{1}{9}\left(4\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}+2\overrightarrow{MD}\right) = \frac{1}{9}\left[(4-9k)\overrightarrow{CB}+2\overrightarrow{CD}\right]$ și $\overrightarrow{MG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}\right) = \frac{1}{3}\left[(2-3k)\overrightarrow{CB}+2\overrightarrow{CD}\right]$. Avem echivalențele: P, I, G sunt coliniare $\Leftrightarrow$ M, I, G sunt coliniare $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{MI}, \overrightarrow{MG}$ sunt coliniari $\Leftrightarrow$ $\frac{4-9k}{2-3k} = \frac{2}{2} \Leftrightarrow k = \frac{1}{3} \Leftrightarrow M \in (CB)$, $CM = \frac{CB}{3} = \frac{2}{3}$.

Clasa a X-a

MGO 26. *Într-o tribună a unui stadion sunt* 20000 *de spectatori și* 20000 *de veste, unele albe și celelalte roșii. Fiecare spectator îmbracă o vestă, obținându-se astfel o imagine a tribunei, numită coregrafie.*

a) Câte veste de fiecare culoare trebuie să fie pentru ca numărul de coregrafii ce pot fi realizate să fie maxim?

b) Dar dacă vestele sunt de trei culori: albe, roșii și negre?

Stelian Corneliu Andronescu și *Costel Bălcău*, Pitești

Soluție. a) Notând cu a numărul de veste albe, numărul de coregrafii este egal cu C_{20000}^{a}. Acest număr este maxim pentru $a = 10000$, adică pentru 10000 de veste albe și 10000 de veste roșii.

b) Notând cu a, r și n numerele de veste albe, roșii și respectiv negre, unde $a + r + n = 20000$, numărul de coregrafii este egal cu $N(a, r, n) = \dfrac{20000!}{a!r!n!}$ (numit *număr multinomial*). Demonstrăm că numărul $N(a, r, n)$ este maxim când termenii a, r și n sunt cât mai apropiați posibil, adică dacă și numai dacă diferența $\max\{a, r, n\} - \min\{a, r, n\}$ este minimă, în cazul nostru egală cu 1. Într-adevăr, dacă $N(a, r, n)$ ar fi maxim, dar $\max\{a, r, n\} - \min\{a, r, n\} \geq 2$, presupunând, de exemplu, că $\max\{a, r, n\} = a$ și $\min\{a, r, n\} = n$ avem $a + n = 20000 - r$ și $N(a - 1, r, n + 1) = \dfrac{20000!}{(a-1)!r!(n+1)!} = C_{20000}^{r} C_{20000-r}^{a-1} > C_{20000}^{r} C_{20000-r}^{a} = \dfrac{20000!}{a!r!n!} = N(a, r, n)$, contradicție. În concluzie, numărul de coregrafii este maxim pentru $(a, r, n) \in \{(6667, 6666, 6666),\ (6666, 6667, 6666),\ (6666, 6666, 6667)\}$.

MGO 27. *Dacă* $a, b, c \in (0, \infty)$, *atunci are loc inegalitatea:*

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} + \frac{2}{a^2 + b^2 + c^2} \geq \frac{11}{ab + bc + ca}.$$

Costel Anghel, Slatina

Soluție. Conform *Inegalității Cauchy-Buniakowski-Schwarz* avem $(a + b + c)^2 \leq (ab + bc + ca)\left(\dfrac{a^2}{ab} + \dfrac{b^2}{bc} + \dfrac{c^2}{ca}\right)$ și $(a + b + c)^2 \leq (ca + ab + bc)\left(\dfrac{a^2}{ca} + \dfrac{b^2}{ab} + \dfrac{c^2}{bc}\right)$, deci $\dfrac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca} \leq \dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{a}$ și $\dfrac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca} \leq \dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{a} + \dfrac{c}{b}$. Prin adunare obținem $2 \cdot \dfrac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca} \leq (ab + bc + ca)\left(\dfrac{1}{ab} + \dfrac{1}{bc} + \dfrac{1}{ca}\right) - 3$, de unde rezultă că $\dfrac{1}{ab} + \dfrac{1}{bc} + \dfrac{1}{ca} \geq \dfrac{3}{ab+bc+ca} + 2 \cdot \dfrac{(a+b+c)^2}{(ab+bc+ca)^2}$. Prin urmare este suficient să arătăm că $2 \cdot \dfrac{(a+b+c)^2}{(ab+bc+ca)^2} + \dfrac{2}{a^2+b^2+c^2} \geq \dfrac{8}{ab+bc+ca}$, sau, echivalent, $\dfrac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca} + \dfrac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} \geq 4$, adică $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} + \dfrac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} \geq 2$, inegalitate care este evident adevărată.

MGO 28. *Rezolvați în* $\mathbb{R}^4$ *sistemul*

$$\begin{cases} a+b+c+d=6 \\ a^2+b^2+c^2+d^2=12 \\ 4\,(abc+abd+acd+bcd)=27+4abcd \end{cases}.$$

Leonard Giugiuc și *Diana Trăilescu*, Drobeta Turnu Severin

Soluție. Notând $a-1=x$, $b-1=y$, $c-1=z$ și $d-1=t$, sistemul dat este echivalent cu $\begin{cases} x+y+z+t=2 \\ x^2+y^2+z^2+t^2=4 \\ xyzt=\dfrac{1}{4} \end{cases}$. Avem $xyzt>0$, $x+y+z+t>0$ și $xy+xz+xt+yz+yt+zt=0$, deci două dintre numerele x,y,z,t sunt pozitive și celelalte două sunt negative. Fără a restrânge generalitatea, presupunem că $x,y>0$ și $z=-u$, $t=-v$, cu $u,v>0$. Avem $u+v=x+y-2$ și $u^2+v^2=4-(x^2+y^2)$. Deoarece $(u+v)^2 \leq 2(u^2+v^2)$, rezultă că $2(x^2+y^2)+(x+y-2)^2 \leq 8$. Cum $(x+y)^2 \leq 2(x^2+y^2)$, deducem că $(x+y)^2+(x+y-2)^2 \leq 8$. Notând $x+y=2s$ rezultă că $2s^2-2s-1 \leq 0$, deci $s \leq k$, unde $k=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$. Deci $xy \leq s^2 \leq k^2$. Pe de altă parte, $\dfrac{u+v}{2}=s-1 \leq \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}=\dfrac{1}{2k}$, deci $uv \leq (s-1)^2 \leq \dfrac{1}{4k^2}$. Rezultă că $xyzt=xyuv \leq k^2 \cdot \dfrac{1}{4k^2}=\dfrac{1}{4}$. Mai mult, $xyzt=\dfrac{1}{4}$ dacă și numai dacă $x=y=k$ și $u=v=\dfrac{1}{2k}$, adică $(x,y,z,t)=\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2},\dfrac{1+\sqrt{3}}{2},\dfrac{1-\sqrt{3}}{2},\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$. Astfel soluțiile sistemului din enunț sunt $(a,b,c,d)=\left(\dfrac{3+\sqrt{3}}{2},\dfrac{3+\sqrt{3}}{2},\dfrac{3-\sqrt{3}}{2},\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}\right)$ și permutările acesteia.

MGO 29. *Fie* $a>-1$. *Rezolvați ecuația*

$$10\sqrt[3]{10x+12}=(a+1)\,x^3-10ax-12(a+1).$$

Daniel Jinga, Pitești

Soluție. Ecuația se rescrie sub forma $\sqrt[3]{10x+12}+ax=(a+1)\dfrac{x^3-12}{10}$. Notăm $(a+1)\dfrac{x^3-12}{10}=y$, deci $x=\sqrt[3]{\dfrac{10y}{a+1}+12}$, (1). Dar $\sqrt[3]{10x+12}+ax=y$, (2).

Adunând (1) și (2) se obține: $\sqrt[3]{10x+12}+(a+1)x=\sqrt[3]{\dfrac{10y}{a+1}+12}+y$, (3).

Considerăm funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{10x+12} + (a+1)x$. f este strict crescătoare, deci injectivă, iar relația (3) se scrie $f(x) = f\left(\dfrac{y}{a+1}\right)$, deci rezultă că $x = \dfrac{y}{a+1}$. Atunci din (2) se obține: $\sqrt[3]{10x+12} + ax = (a+1)x \Leftrightarrow \sqrt[3]{10x+12} = x$ $\Leftrightarrow x^3 - 10x - 12 = 0 \Leftrightarrow x^3 + 8 - 10x - 20 = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x^2 - 2x - 6) = 0 \Leftrightarrow$ $x \in \left\{-2, 1-\sqrt{7}, 1+\sqrt{7}\right\}$.

MGO 30. *Fie mulțimea $\mathbb{Q}[i] = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z \in \mathbb{Q}\}$. Determinați numerele $z \in \mathbb{Q}[i]$ pentru care există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $z^n = 1$.*

***

Soluție. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Arătăm că dacă $z^n \in \{\pm 1, \pm i\}$, $z \in \mathbb{Q}[i]$, atunci $z \in \{\pm 1, \pm i\}$. Notăm afirmația cu $P(n)$ și îi demonstrăm valabilitatea prin inducție după n. $P(1)$ și $P(2)$ sunt, evident, adevărate. Presupunem adevărată $P(k)$ pentru orice $k \leq n-1$ și demonstrăm $P(n)$, $n \geq 3$.

Pentru n par, $n = 2m$, $m \in \mathbb{N}^*$, din $z^{2m} \in \{\pm 1, \pm i\}$, $z \in \mathbb{Q}[i]$ deducem că $(z^2)^m \in \{\pm 1, \pm i\}$, $z^2 \in \mathbb{Q}[i]$, deci conform $P(m)$ avem $z^2 \in \{\pm 1, \pm i\}$, de unde rezultă că $z \in \{\pm 1, \pm i\}$, conform $P(2)$.

Pentru n impar, fie $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{Q}$ a.î. $z^n \in \{\pm 1, \pm i\}$. Analizăm doar cazul $z^n = 1$, celelalte trei cazuri fiind similare. Evident, $|z| = 1$, deci $x^2 + y^2 = 1$. Pentru a demonstra că $z \in \{\pm 1, \pm i\}$, este suficient să arătăm că $x = 0$ sau $y = 0$. Presupunem prin absurd că x și y sunt nenule. Fie $x = \dfrac{a}{c}$ și $y = \dfrac{b}{c}$, $a, b, c \in \mathbb{Z}^*$. Deoarece $a^2 + b^2 = c^2$, deducem că putem presupune că ambele fracții sunt ireductibile iar numerele a și b sunt diferite de ± 1 și prime între ele. Ecuația $z^n = 1$ devine $(a + bi)^n = c^n$, deci $\operatorname{Im}(a+bi)^n = 0$. Aplicând *formula binomului lui Newton* obținem $C_n^1 a^{n-1} b - C_n^3 a^{n-3} b^3 + \ldots - (-1)^{\frac{n-1}{2}} C_n^{n-2} a^2 b^{n-2} + (-1)^{\frac{n-1}{2}} b^n = 0$, de unde rezultă că orice divizor prim al lui a îl divide și pe b, contradicție cu presupunerea că a și b sunt prime între ele. Demonstrația propoziției $P(n)$ este completă. Cum $(\pm 1)^4 = (\pm i)^4 = 1$, rezultă că $\pm 1, \pm i$ sunt singurele numere din $\mathbb{Q}[i]$ care verifică proprietatea din enunț.

Clasa a XI-a

MGO 31. *Fie permutarea $\sigma \in \mathcal{S}_{2017}$ cu proprietatea că $\sigma(i) = i + 2$ pentru orice $i \in \{1, 2, \ldots, 2015\}$. Arătați că există $x \in \mathcal{S}_{2017}$ astfel încât $x^5 = \sigma$.*

Stelian Corneliu Andronescu și *Costel Bălcău*, Pitești

Soluție. Avem două cazuri.

1) $\sigma(2016) = 1$ și $\sigma(2017) = 2$. Atunci permutarea σ este un ciclu, și anume $\sigma = (1\ 3\ 5\ \ldots\ 2017\ 2\ 4\ \ldots\ 2016)$, deci are ordinul $\operatorname{ord}(\sigma) = 2017$. Luând $x = \sigma^{807}$ avem $x^5 = \sigma^{4035} = \sigma^{2017\cdot 2+1} = \sigma$.

2) $\sigma(2016) = 2$ și $\sigma(2017) = 1$. Atunci σ se descompune în produs de doi cicli disjuncți, și anume $\sigma = (1\ 3\ 5\ \ldots\ 2017)\cdot(2\ 4\ \ldots\ 2016)$, deci are ordinul $\operatorname{ord}(\sigma) = [1009, 1008] = 1008\cdot 1009$. Luând $x = \sigma^n$, unde $n = \frac{2\cdot 1008\cdot 1009+1}{5} \in \mathbb{N}$, avem $x^5 = \sigma^{1008\cdot 1009\cdot 2+1} = \sigma$.

MGO 32. *Se consideră numărul natural k, $k \geq 2$. Calculați limita șirului $(a_n)_{n\geq 0}$ definit prin $a_0 = -1$, $a_1 = -2$ și $a_n = \dfrac{\sqrt[k]{a_{n-1}^2 a_{n-2}^4}}{a_{n-2}}$, $\forall n \geq 2$.*

Stelian Corneliu Andronescu și *Costel Bălcău*, Pitești

Soluție. Evident, $a_n < 0$, $\forall n \geq 0$ (inducție). Fie $b_n = \ln(-a_n)$, $\forall n \geq 0$. Atunci $b_0 = 0$, $b_1 = \ln 2$ și $kb_n = 2b_{n-1} + (4-k)b_{n-2}$, $\forall n \geq 2$. Ecuația caracteristică a acestei recurențe liniare este $kx^2 - 2x + k - 4 = 0$, având determinantul $\Delta = -4(k^2 - 4k - 1) \neq 0$, deci rădăcinile sale x_1, x_2 sunt distincte.

Pentru $k \geq 5$ avem $\Delta < 0$, deci $x_1, x_2 \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, $x_2 = \overline{x_1}$ și există $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ a.î. $b_n = c_1x_1^n + c_2x_2^n$, $\forall n \geq 0$. Din $b_0 = 0$ obținem $c_2 = -c_1$, deci avem $b_n = c_1(x_1^n - x_2^n)$, $\forall n \geq 0$. Considerând forma trigonometrică $x_1 = r(\cos t + i\sin t)$, unde $r = |x_1| = |x_2| = \sqrt{\frac{k-4}{k}}$ (deoarece $x_1x_2 = \frac{k-4}{k}$) și $t \in (0, 2\pi)\setminus\{\pi\}$ (deoarece $x_1 \notin \mathbb{R}$), rezultă că $b_n = 2ic_1\cdot r^n\sin nt$, $\forall n \geq 0$. Deoarece $b_1 = \ln 2$ obținem $c_1 = \dfrac{\ln 2}{2ir\sin t}$, deci $b_n = \dfrac{r^{n-1}\ln 2\sin nt}{\sin t} = \dfrac{\ln 2\sin nt}{\sin t}\cdot\left(\sqrt{\frac{k-4}{k}}\right)^{n-1}$, $\forall n \geq 0$. Rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -1$.

Pentru $k = 2$ avem $x_{1,2} = \dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ și $b_n = c_1x_1^n + c_2x_2^n$, $\forall n \geq 0$. Din $b_0 = 0$ și $b_1 = \ln 2$ obținem că $b_n = \dfrac{\ln 2}{\sqrt{5}}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$, $\forall n \geq 0$. Deci $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$ și astfel $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Pentru $k = 3$ avem $x_1 = 1$, $x_2 = -\dfrac{1}{3}$ și $b_n = c_1 + c_2\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$, $\forall n \geq 0$. Din $b_0 = 0$ și $b_1 = \ln 2$ obținem că $b_n = \dfrac{3\ln 2}{4}\left[(1 - \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n\right]$, $\forall n \geq 0$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \dfrac{3\ln 2}{4}$ și $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\sqrt[4]{8}$.

Pentru $k = 4$ avem $b_n = \dfrac{b_{n-1}}{2}$, $\forall n \geq 2$, deci $b_n = \dfrac{b_1}{2^{n-1}} = \dfrac{\ln 2}{2^{n-1}}$, $\forall n \geq 1$, prin urmare $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ și $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -1$.

MGO 33. *Fie șirurile* $(x_n)_{n\geq 1}$, $(y_n)_{n\geq 1}$ *și* $(z_n)_{n\geq 1}$ *de numere reale pozitive, astfel încât* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=1$, $y_n=\dfrac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$ *și* $z_n=\max\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$, *pentru orice* $n\geq 1$. *Arătați că* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{y_{n+1}}{y_n}=1$ *și* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{z_{n+1}}{z_n}=1$.

Mihai Florea Dumitrescu, Potcoava

Soluție. Avem $\dfrac{y_{n+1}}{y_n}=\dfrac{s_{n+1}}{s_n}\cdot\dfrac{n}{n+1}$, unde $s_n=x_1+x_2+\ldots+x_n$, $\forall n\geq 1$. Șirul (s_n) este crescător, deci există $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=l$, finită sau $+\infty$. Dacă limita l este finită, atunci $l\geq s_1=x_1>0$, deci $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{s_{n+1}}{s_n}=\dfrac{l}{l}=1$. Dacă $l=+\infty$, atunci aplicând *Lema Stolz-Cesaro* avem $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{s_{n+1}}{s_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{s_{n+2}-s_{n+1}}{s_{n+1}-s_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=1$. Prin urmare, în ambele cazuri avem $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{y_{n+1}}{y_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{s_{n+1}}{s_n}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1\cdot 1=1$.

Evident, $z_{n+1}=\max\{z_n,x_{n+1}\}$, $\forall n\geq 1$. Dacă $z_n\geq x_{n+1}$, atunci $z_{n+1}=z_n$, deci $\dfrac{z_{n+1}}{z_n}=1$. Dacă $z_n<x_{n+1}$, atunci $z_{n+1}=x_{n+1}$ și $1<\dfrac{z_{n+1}}{z_n}=\dfrac{x_{n+1}}{z_n}\leq\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$ (deoarece, evident, $z_n\geq x_n$). Prin urmare, avem $1\leq\dfrac{z_{n+1}}{z_n}\leq\max\left\{1,\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right\}$, $\forall n\geq 1$. Aplicând *Criteriul cleștelui* rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{z_{n+1}}{z_n}=1$.

Remarcăm că, în ipotezele date, dacă $t_n=\min\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$, pentru orice $n\geq 1$, atunci, procedând ca mai sus, avem $\min\left\{1,\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right\}\leq\dfrac{t_{n+1}}{t_n}\leq 1$, $\forall n\geq 1$, deci și $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{t_{n+1}}{t_n}=1$.

MGO 34. *Demonstrați că dacă matricele* $A,B,C\in\mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$ *verifică relația* $(B-C)^2=(A+B)(A+C)$, *atunci* $\det(AB-BA+CA-AC+CB-BC)=0$.

George Mihai, Slatina

Soluție. Fie x_1 și x_2 rădăcinile ecuației $x^2-x-1=0$, deci $x_1+x_2=1$, $x_1x_2=-1$, $x_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Considerăm matricele $U=A+x_1B+x_2C$ și $V=A+x_2B+x_1C$. Avem $UV=A^2-B^2-C^2+BC+CB+x_1(BA+AC+BC)+x_2(AB+CA+CB)$. Dar $A^2-B^2-C^2+BC+CB=A^2-(B-C)^2=A^2-(A+B)(A+C)=-(BA+AC+BC)$, deci $UV=(x_1-1)(BA+AC+BC)+x_2(AB+CA+CB)=x_2(AB+CA+CB-BA-AC-BC)$. Evident, $\det U=a+b\sqrt{5}$ și $\det V=a-b\sqrt{5}$, cu $a,b\in\mathbb{Q}$. Pe de o parte, $\det(UV)=\det U\det V=a^2-5b^2\in\mathbb{Q}$, iar pe de altă parte $\det(UV)=\det\left(x_2(AB+CA+CB-BA-AC-BC)\right)=x_2^n\det(AB+CA+CB-BA-AC-BC)$. Cum $x_2^n\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ (deoarece $x_{1,2}^n=c_n\pm d_n\sqrt{5}$, cu $c_n,d_n\in\mathbb{Q}$, iar dacă $d_n=0$ ar rezulta că $x_1=\pm x_2$, fals), conchidem că $\det(AB+CA+CB-BA-AC-BC)=0$.

MGO 35. *Fie* $f : D \to \mathbb{R}$ *o funcție convexă (sau concavă),* $D \subseteq \mathbb{R}$*. Atunci* f *este continuă pe* $\operatorname{Int} D$ *(unde* $\operatorname{Int} D = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists V$ *vecinătate a lui* x *a.î.* $V \subseteq D\}$ *reprezintă mulțimea punctelor interioare ale domeniului de definiție* D*).*

***

Soluție. Considerăm că f este convexă (cazul f concavă este similar sau poate fi redus la cazul considerat, luând funcția $-f$). Fie un punct arbitrar $x \in \operatorname{Int} D$. Evident, există $[a, b] \subseteq D$ a.î. $x \in (a, b)$. Fie $(x_n)_{n\geq 1} \subset D$ un șir arbitrar a.î. $x_n \to x$ și $x_n > x$, $\forall n$. Evident, există un rang n_0 a.î. $x_n < b$, $\forall n \geq n_0$. Pentru orice $n \geq n_0$ avem $x_n = \alpha_n x + (1 - \alpha_n)b$ și $x = \beta_n a + (1 - \beta_n)x_n$, unde $\alpha_n = \dfrac{b - x_n}{b - x}$ și $\beta_n = \dfrac{x_n - x}{x_n - a}$. Evident, $\alpha_n, \beta_n \in (0, 1)$, $\forall n \geq n_0$, $\alpha_n \to 1$ și $\beta_n \to 0$. Funcția f fiind convexă, rezultă că $f(x_n) \leq \alpha_n f(x) + (1 - \alpha_n)f(b)$ și $f(x) \leq \beta_n f(a) + (1 - \beta_n)f(x_n)$. Astfel avem $\dfrac{f(x) - \beta_n f(a)}{1 - \beta_n} \leq f(x_n) \leq \alpha_n f(x) + (1 - \alpha_n)f(b)$, $\forall n \geq n_0$. Aplicând *Criteriul cleștelui* rezultă că $f(x_n) \to f(x)$, prin urmare $f_d(x) = f(x)$. Analog se demonstrează că $f_s(x) = f(x)$ (luând $x'_n \to x$, $a < x'_n < x < b$, $x'_n = \alpha'_n a + (1 - \alpha'_n)x$, $x = \beta'_n x'_n + (1 - \beta'_n)b$, etc.) și astfel rezultă că f este continuă în punctul x.

Clasa a XII-a

MGO 36. *Să se calculeze integrala*

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x \cos x}{1 + \sqrt{2}e^x \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}\, dx.$$

Mihai Florea Dumitrescu, Potcoava

Soluție. $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{e^x \cos x}{1 + e^x(\sin x + \cos x)}\, dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{e^{-x} + \sin x + \cos x}\, dx$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \left(1 - \frac{e^{-x} + \sin x - \cos x}{e^{-x} + \sin x + \cos x}\right) dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \left[1 + \frac{(e^{-x} + \sin x + \cos x)'}{e^{-x} + \sin x + \cos x}\right] dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[x + \ln\left(e^{-x} + \sin x + \cos x\right)\right]\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln\frac{e^{-\pi/2} + 1}{2}.$$

MGO 37. *Fie* $a < b$ *și* $n \in \mathbb{N}^*$*. Calculați următoarele integrale:*

a) $I_1 = \displaystyle\int_a^b \frac{1}{(x - a)^{2n+1} + (x - b)^{2n+1}}\, dx.$

b) $I_2 = \int_a^b \frac{1}{(x-a)^{2n} - (x-b)^{2n}}\, dx.$

c) $I_3 = \int_a^b \frac{(x-a)^n}{(x-a)^n + (x-b)^n}\, dx.$

Daniel Jinga, Pitești

Soluție. Cu schimbarea de variabilă $x = a + b - t$, cele trei integrale devin:

a) $I_1 = \int_a^b \frac{1}{(b-t)^{2n+1} + (a-t)^{2n+1}}\, dt = \int_a^b \frac{1}{-(t-b)^{2n+1} - (t-a)^{2n+1}}\, dt = -I_1$, deci $2I_1 = 0$ și astfel $I_1 = 0$;

b) $I_2 = \int_a^b \frac{1}{(b-t)^{2n} - (a-t)^{2n}}\, dt = -I_2$, deci $I_2 = 0$;

c) $I_3 = \int_a^b \frac{(b-t)^n}{(b-t)^n + (a-t)^n}\, dt = \int_a^b \frac{(-1)^n(t-b)^n}{(-1)^n(t-b)^n + (-1)^n(t-a)^n}\, dt = \int_a^b \frac{(t-b)^n}{(t-b)^n + (t-a)^n}\, dt = \int_a^b \left[1 - \frac{(t-a)^n}{(t-b)^n + (t-a)^n}\right] dt = b - a - I_3$, deci $2I_3 = b - a$ și astfel $I_3 = \frac{b-a}{2}$.

MGO 38. *Se consideră funcțiile polinomiale $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 10x^2 - 2x + 2$ și $g(x) = x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 10x - 2$. Fie $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție polinomială de gradul 4. Să se arate că funcția h verifică inegalitatea dublă $g(x) \le h(x) \le f(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, dacă și numai dacă există $\lambda \in [0,1]$ astfel încât $h(x) = \lambda f(x) + (1-\lambda)\, g(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.*

George Mihai, Slatina

Soluție. Avem $f(x) - g(x) = (x^2 - 3x + 2)^2 = (x-1)^2(x-2)^2$. Fie funcția polinomială $u(x) = h(x) - g(x)$. Inegalitatea $g(x) \le h(x) \le f(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, (1), este echivalentă cu $0 \le h(x) - g(x) \le f(x) - g(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, adică cu inegalitatea $0 \le u(x) \le (x-1)^2(x-2)^2$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, (2).

Dacă h verifică (1), atunci luând $x = 1$ în (2) rezultă că $u(1) = 0$, deci $u(x)$ se divide cu $x - 1$. Fie $u(x) = (x-1)v(x)$. Înlocuind în (2) rezultă că $0 \le |v(x)| \le |x-1|(x-2)^2$, $\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Luând acum $x \to 1$ rezultă că $v(1) = 0$, prin urmare $u(x)$ se divide cu $(x-1)^2$. Analog se obține că $u(x)$ se divide cu $(x-2)^2$. Cum grad $u(x) \le 4$, deducem că $u(x) = \lambda(x-1)^2(x-2)^2$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, (3), cu $\lambda \in \mathbb{R}$. Înlocuind din nou în (2) rezultă că $\lambda \in [0,1]$. Evident, (3) este echivalentă cu $h(x) - g(x) = \lambda(f(x) - g(x))$, adică cu $h(x) = \lambda f(x) + (1-\lambda)g(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

Reciproc, dacă h are această ultimă formă, cu $\lambda \in [0,1]$, atunci u are forma (3), deci verifică (2) și astfel h verifică (1).

MGO 39. *Dacă $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ este o funcție integrabilă, arătați că are loc inegalitatea*

$$\int_0^1 \sqrt{f^4(x) + \left(\int_0^1 f(t)\,dt\right)^4}\,dx \le \sqrt{2} \cdot \int_0^1 f^2(x)\,dx.$$

Florin Stănescu, Găești

Soluție. Dacă $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$, atunci inegalitatea din enunț este evidentă. Presupunem în continuare că $I = \int_0^1 f(x)\,dx \neq 0$. Luând $a = \frac{f(x)}{I}$ în inegalitatea $\sqrt{1+a^4} \le \sqrt{2}(1-a+a^2)$, $\forall a \in \mathbb{R}$ (echivalentă cu $(a-1)^4 \ge 0$) și integrând pe intervalul $[0,1]$, obținem că $\int_0^1 \sqrt{1+\frac{f^4(x)}{I^4}}\,dx \le \sqrt{2}\left[1 - \int_0^1 \frac{f(x)}{I}\,dx + \int_0^1 \frac{f^2(x)}{I^2}\,dx\right]$, adică $\frac{1}{I^2}\int_0^1 \sqrt{I^4 + f^4(x)}\,dx \le \sqrt{2}\left[1 - \frac{1}{I}\cdot I + \frac{1}{I^2}\int_0^1 f^2(x)\,dx\right]$, de unde rezultă inegalitatea din enunț.

MGO 40. *Determinați grupurile finite G cu proprietatea că reuniunea oricăror două subgrupuri ale lui G este tot un subgrup al lui G.*

***

Soluție. Demonstrăm că pentru orice două subgrupuri H și K ale lui G avem $H \subseteq K$ sau $K \subseteq H$ prin reducere la absurd. Într-adevăr, în caz contrar ar exista $h \in H \setminus K$ și $k \in K \setminus H$, deci $h, k \in H \cup K$ și $hk \notin H \cup K$, contradicție cu faptul că $H \cup K$ este subgrup al lui G.

Fie $x \in G$ a.î. $\operatorname{ord}(x) = \max\{\operatorname{ord}(t) \mid t \in G\}$ (există, conform *Teoremei lui Lagrange*). Pentru orice $y \in G$ avem $|\langle y\rangle| = \operatorname{ord}(y) \le \operatorname{ord}(x) = |\langle x\rangle|$, deci $\langle y\rangle \not\supset \langle x\rangle$; astfel $\langle y\rangle \subseteq \langle x\rangle$, deci $y \in \langle x\rangle$. Rezultă că $\langle x\rangle = G$, deci G este grup ciclic, adică $G \simeq \mathbb{Z}_n$, unde $n = |G|$.

Demonstrăm că $n = p^m$, cu p număr prim și $m \in \mathbb{N}$, prin reducere la absurd. Într-adevăr, în caz contrar n ar avea printre divizori două numere prime distincte p și q, deci $\widehat{p} \in \langle\widehat{p}\rangle \setminus \langle\widehat{q}\rangle$ și $\widehat{q} \in \langle\widehat{q}\rangle \setminus \langle\widehat{p}\rangle$, și astfel $\langle\widehat{p}\rangle \not\subseteq \langle\widehat{q}\rangle$ și $\langle\widehat{q}\rangle \not\subseteq \langle\widehat{p}\rangle$, contradicție. Reciproc, grupul $\mathbb{Z}_{p^m}$, cu p număr prim și $m \in \mathbb{N}$, satisface condiția din enunț, deoarece subgrupurile sale au forma $\left\langle \widehat{p^i} \right\rangle$, $i = \overline{0,m}$, și pentru orice $i \le j$ avem $\left\langle \widehat{p^j} \right\rangle \subseteq \left\langle \widehat{p^i} \right\rangle$.

Probleme propuse

Clasa a V-a

MGO 41. Numerele naturale nenule sunt afișate în pătrățelele unei tabele electronice astfel încât să se formeze repetat *Numărul Marii Uniri*, adică $19181918\ldots$, ca mai jos. Tabela are cinci linii, numerotate de sus în jos cu $1, 2, \ldots, 5$, iar coloanele sale sunt numerotate de la stânga la dreapta cu $1, 2, \ldots$.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
1		2	7	11	14		20	25	30	33		39	
2	1	3	8		15	19	21	26		34	38	40	
3		4	9	12	16		22	27	31	35		41	
4		5			17		23	28		36		42	
5		6	10	13	18		24	29	32	37		43	

Pe ce linie și pe ce coloană se află *Numărul Centenarului*, $\boxed{2018}$?

Costel Anghel, Slatina

MGO 42. Determinați numerele naturale nenule n pentru care numărul $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ se termină în exact 2018 zerouri.

Stelian Corneliu Andronescu și *Costel Bălcău*, Pitești

MGO 43. Arătați că numărul $A = 10^{n+2} + 11^{2n+1}$ se divide cu 37, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Florea Badea, Scornicești

MGO 44. Câte numere naturale de forma $\overline{acbabc}$, scrise în baza 10, sunt divizibile cu 7?

Florea Badea, Scornicești și *Costel Anghel*, Slatina

MGO 45. Numărul $\overline{ab}$ scris în baza 10 se numește *special* dacă restul și câtul împărțirii lui a prin b sunt numere naturale nenule egale. Câte *numere speciale* există?

Adrian Țurcanu, Pitești

Clasa a VI-a

MGO 46. Calculați suma ultimelor 503 cifre ale numărului $N = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2018$.

Stelian Corneliu Andronescu și *Costel Bălcău*, Pitești

MGO 47. Fie ABC un triunghi cu $AB \neq AC$. Determinați poziția punctului P situat pe bisectoarea unghiului BAC pentru care $PG = \dfrac{|AB - AC|}{3}$, unde G este centrul de greutate al triunghiului BCP.

Florea Badea, Scornicești și *Costel Anghel*, Slatina

MGO 48. Arătați că oricare ar fi numerele naturale n, a, b, r cu $0 \leq r \leq 3$ și $a \geq b \geq 1$, numărul $N = n^{4a+r} - n^{4b+r}$ este divizibil cu 30.

Marian Haiducu, Pitești

MGO 49. Determinați numerele naturale a și b, știind că cel mai mare divizor comun al lor este 1005, iar suma pătratelor lor este egală cu 10100250.

Marin Chirciu, Pitești

MGO 50. Fie ABC un triunghi, D un punct pe dreapta BC diferit de B și de C, M un punct pe segmentul (AD), iar E și F picioarele perpendicularelor duse din D pe dreptele MB, respectiv MC. Știind că $[DE] \equiv [DF]$ și $EF \| BC$, arătăți că:

a) $E \in (MB)$ și $F \in (MC)$, iar D este mijlocul lui $[BC]$.

b) Triunghiul ABC este isoscel, $[AB] \equiv [AC]$.

Florin Stănescu, Găești

Clasa a VII-a

MGO 51. Determinați numerele raționale de forma $A = \sqrt{\dfrac{25n-1}{n+11}}$, cu $n \in \mathbb{N}^*$.

Marin Chirciu, Pitești

MGO 52. În exteriorul triunghiului ABC având $m(\sphericalangle A) = 30^\circ$ se construiesc triunghiurile echilaterale ABD și ACE. Fie K simetricul punctului A față de mijlocul segmentului $[DE]$. Arătați că $\mathcal{A}_{BKC} = \mathcal{A}_{ABD} + \mathcal{A}_{ACE} - 3\mathcal{A}_{ABC}$.

Mihai Florea Dumitrescu, Potcoava

MGO 53. Fie $ABCD$ un patrulater convex, a, b, c, d lungimile laturilor și d_1, d_2 lungimile diagonalelor sale. Arătați că

$$\frac{a+b+c+d}{4} < \frac{d_1^2+d_2^2}{d_1+d_2} < \frac{a+b+c+d}{2}.$$

Marian Haiducu, Pitești

MGO 54. Fie ABC un triunghi circumscris unui cerc $\mathcal{C}$ de centru I. Cercul $\mathcal{C}$ este tangent laturilor BC, CA, AB în punctele D, E, respectiv F și intersectează segmentele $[AI]$, $[BI]$, $[CI]$ în punctele M, N, respectiv P. Arătați că triunghiurile DEF și MNP au același centru de greutate dacă și numai dacă triunghiul ABC este echilateral.

Marin Ionescu, Pitești

MGO 55. Fie numerele reale $a_1, a_2, \ldots, a_n$ având suma egală cu $\dfrac{n(n+1)}{2}$. Dacă $\sqrt{(a_1+1)^2+(a_2+2)^2}+\sqrt{(a_2+2)^2+(a_3+3)^2}+\ldots+\sqrt{(a_n+n)^2+(a_1+1)^2} \leq n(n+1)\sqrt{2}$, să se arate că $a_1-1+2\left(a_2-\dfrac{3}{2}\right)+\ldots+n\left(a_n-\dfrac{n+1}{2}\right)=0$.

Sorin Ulmeanu și *Costel Bălcău*, Pitești

Clasa a VIII-a

MGO 56. Fie $VABCD$ și $VAEF$ două piramide regulate de vârf V astfel încât înălțimile lor sunt congruente și $EF \| BD$. Calculați raportul dintre volumele celor două piramide.

Florea Badea, Scornicești și *Costel Anghel*, Slatina

MGO 57. Reprezentați grafic, într-un sistem de coordonate xOy, soluțiile ecuației

$$x^3+y^3+(x+y)^3+50(x+y)+15xy=500,\ x,y \in \mathbb{R}.$$

Marin Chirciu, Pitești

MGO 58. Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$, E mijlocul segmentului $[AA']$ și $F \in C'D'$ astfel încât $EB \perp DF$. Calculați cosinusul unghiului dintre planele (EBD) și (FBD).

Mihai Florea Dumitrescu, Potcoava

MGO 59. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ și $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ astfel încât $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\ldots+\dfrac{1}{x_n}=n$. Arătați că $\quad x_1^2x_2+x_2^2x_3+\ldots+x_{n-1}^2x_n+x_n^2x_1 \geq 2(x_1+x_2+\ldots+x_n)-n$.

Marin Ionescu, Pitești

MGO 60. Aflați $a,b,c,d>0$, știind că $a+b+c+d=2$ și $\dfrac{2}{2a+b+c}+\dfrac{2}{2b+c+d}+\dfrac{2}{2c+d+a}+\dfrac{2}{2d+a+b}=\dfrac{1}{(a+b)(c+d)}+\dfrac{2}{(a+c)(b+d)}+\dfrac{1}{(a+d)(b+c)}$.

Florin Stănescu, Găești

Clasa a IX-a

MGO 61. Se consideră triunghiul ABC și punctele $M \in (AB)$, $N \in (AC)$, $P \in (BC)$ astfel încât $AM = CP$, $AN = BP$, $BM = CN$. Fie A', B', C' mijloacele segmentelor $[BC]$, $[AC]$, respectiv $[AB]$, iar M', N', P' mijloacele segmentelor $[NP]$, $[MP]$, respectiv $[MN]$. Arătați că $A'P' \cdot B'N' \cdot C'M' = \dfrac{h_a h_b h_c}{8}$, unde h_a, h_b, h_c reprezintă lungimile înălțimilor triunghiului ABC.

Mihai Florea Dumitrescu, Potcoava

MGO 62. Fie $x, y, z \in [0, 2]$ astfel încât $xy + yz + zx + xyz = 4$. Determinați valorile extreme ale expresiei $\dfrac{4 - xy}{4 + xy} + \dfrac{4 - yz}{4 + yz} + \dfrac{4 - zx}{4 + zx}$.

Leonard Mihai Giugiuc, România și *Michael Rozenberg*, Israel

MGO 63. Fie ABC și $A'B'C'$ două triunghiuri asemenea astfel încât vectorii $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$ și $\overrightarrow{CC'}$ nu sunt toți coliniari și au suma $\vec{0}$. Să se arate că cercurile înscrise în cele două triunghiuri au același centru dacă și numai dacă triunghiurile sunt echilaterale.

Marin Ionescu, Pitești

MGO 64. Să se determine numerele reale x, y, z, t, u, v cu proprietatea că

$$x + y + z + t + u + v = \left(x^2 + y^2 + z^2 + \frac{11}{12}\right)\left(y^2 + z^2 + t^2 + \frac{11}{12}\right)\left(z^2 + t^2 + \right.$$
$$\left. + u^2 + \frac{11}{12}\right)\left(t^2 + u^2 + v^2 + \frac{11}{12}\right)\left(u^2 + v^2 + x^2 + \frac{11}{12}\right)\left(v^2 + x^2 + y^2 + \frac{11}{12}\right).$$

Daniel Jinga și *Costel Bălcău*, Pitești

MGO 65. Determinați funcțiile $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ cu proprietatea că

$$f(x + y) = f(x) + f(y) + 2xy(2x^2 + 3xy + 2y^2),\ \forall x, y \in \mathbb{N}.$$

Sorin Ulmeanu, Pitești

Clasa a X-a

MGO 66. Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația

$$\frac{5^x + 9^x + 10^x + 12^x}{3^x + 4^x + 6^x + 8^x + 15^x} > 1.$$

Mihai Florea Dumitrescu, Potcoava

MGO 67. Fie $a, b, c > 0$ astfel încât $a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Demonstrați că

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} + 2\sqrt{2} - \sqrt{3} \geq 2\sqrt{2}abc.$$

Leonard Mihai Giugiuc, Drobeta Turnu Severin

MGO 68. Determinați numerele reale pozitive k pentru care inegalitatea

$$\sqrt{ka+1} + \sqrt{kb+1} + \sqrt{kc+1} \geq 3\sqrt{k+1}$$

are loc pentru orice $a, b, c \in [0, \infty)$ astfel încât $a + b + c = ab + bc + ca > 0$.

Leonard Mihai Giugiuc, România, *Michael Rozenberg*, Israel
și *Valmir Krasniqi*, Kosovo

MGO 69. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația

$$\left(\sin^2 x\right)^{\cos^2 x} = \left(\cos^2 x\right)^{\sin^2 x}.$$

Daniel Jinga, Pitești

MGO 70. Rezolvați în $\mathbb{C}^3$ sistemul

$$\begin{cases} a^2 = b(2b - c) \\ b^2 = c(2c - a) \\ c^2 = a(2a - b) \end{cases}.$$

Florin Stănescu, Găești

Clasa a XI-a

MGO 71. Se consideră un triunghi ABC astfel încât $\arccos \dfrac{1}{\sqrt{3}} \leq A, B, C \leq \dfrac{\pi}{2}$.

Demonstrați că $$\frac{1}{1+\cos^2 A} + \frac{1}{1+\cos^2 B} + \frac{1}{1+\cos^2 C} \geq \frac{12}{5}.$$

Când are loc egalitatea?

Leonard Mihai Giugiuc, România și *Michael Rozenberg*, Israel

MGO 72. Fie matricea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $n \geq 2$, astfel încât $(A^*)^2 \neq O_n$, unde A^* reprezintă matricea adjunctă a lui A. Să se arate că $\operatorname{rang}(A^k) = \operatorname{rang}(A)$, pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$.

Marin Ionescu, Pitești

MGO 73. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ și $f : [a, b] \to [a, b]$ o funcție derivabilă cu $f(a) = b$ și $f(b) = a$. Arătați că există $c_1, c_2 \in (a, b)$, $c_1 \neq c_2$, astfel încât $f'(c_1) + f'(c_2) = -2$.

Daniel Jinga, Pitești

MGO 74. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un șir crescător astfel încât $x_{n^2} = n$ pentru orice $n \geq 1$. Arătați că $\dfrac{x_n}{\sqrt{n}}$ tinde către 1.

Cristinel Mortici, Târgoviște

MGO 75. Arătați că dacă matricele $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ verifică relațiile $\operatorname{tr}(AB) \neq 0$ și $AB^2A + BA^2B = 2(AB)^2$, atunci $AB = BA$.

Rămâne concluzia adevărată dacă se renunță la ipoteza $\operatorname{tr}(AB) \neq 0$?

Florin Stănescu, Găești

Clasa a XII-a

MGO 76. Determinați corpurile finite K cu proprietatea că există $x, y \in K$ astfel încât $(x+y)^{-1} = x^{-1} + y^{-1}$.

Stelian Corneliu Andronescu și *Costel Bălcău*, Pitești

MGO 77. Determinați valoarea minimă $k \in \mathbb{N} \setminus \{2018\}$ cu proprietatea că există un polinom $f \in \mathbb{Z}[X]$ și niște numere întregi $m_1, m_2, \ldots, m_{2018}$ distincte două câte două astfel încât $f(m_i) = 2018$ pentru orice $i \in \{1, 2, \ldots, 2017\}$ și $f(m_{2018}) = k$.

Stelian Corneliu Andronescu și *Costel Bălcău*, Pitești

MGO 78. Determinați $x > 1$ știind că $\displaystyle\int_{-\ln x}^{\ln x} \frac{(\cos t - 3m\sin t)\sqrt{1+e^{4mt}}}{e^{3mt}}\,dt = 0$, unde m este un număr real fixat.

Marin Chirciu, Pitești

MGO 79. Fie $\alpha > \beta > 0$ și $a, b, c, d \geq 0$ astfel încât $a + b + c + d = 2\alpha + \beta$ și $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2\alpha^2 + \beta^2$. Arătați că $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \geq 2\alpha^3 + \beta^3$.

Leonard Mihai Giugiuc, Drobeta Turnu Severin

MGO 80. Fie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$ și funcția $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \alpha \ln x - \beta \cdot \dfrac{x^n - 1}{x^n + 1}$. Calculați $\displaystyle\int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{x^2+1}{x^2} \cdot f(x)\,dx$, unde $a > 0$ este fixat.

Daniel Jinga, Pitești

R

MGO